EXAMEN GENERAL
TEORIA DE GRAFICAS

Enero 2015

La calificación de este examen será sobre siete.

Escoje siete de las siguientes nueve preguntas:

1. Un *elemento* de una gráfica G es un vértice o una arista de G. Prueba que una gráfica G de orden al menos 3 es no-separable si y sólo si cualquier par de elementos de G tienen un ciclo en común (puedes usar el hecho de que por cualesquiera dos vértices pasa un ciclo).

2. Sea G una gráfica no-completa de orden n y sea k entero tal que $1 \leq k \leq n-1$. Prueba que si:

$$deg(v) \geq \lceil \frac{n-2k-2}{2} \rceil,$$

para todo vértice v de G, entonces G es k-conexa.

3. Prueba que una gráfica G de orden $n \geq 2k$ es k-conexa si y solo si para cualquier par de conjuntos de vértices V_1 y V_2 con al menos k vértices cada uno, existen k trayectorias ajenas que conectan a V_1 con V_2.

4. Prueba que una gráfica conexa y no trivial G es euleriana si y sólo si $E(G)$ pueden particionarse en subconjuntos E_i, para $1 \leq i \leq k$, donde cada gráfica generada por las aristas de E_i es un ciclo.

5. Sea G una gráfica bipartita con conjuntos partitos U y W tales que $\mid U \mid = \mid W \mid = k \geq 2$. Prueba que si $deg(v) > \frac{k}{2}$ para todo $v \in G$, entonces G es hamiltoniana.

6. Prueba que:

   (a) K_5 no es plana.

   (b) $K_{3,3}$ no es plana.

   (c) La gráfica de Petersen no es plana.

7. Prueba que si G es una gráfica que no es ni un ciclo impar ni una gráfica completa entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
   Hint: Utiliza una subgráfica k-cromática crítica de G y el hecho de que las gráficas k-cromáticas crticas son $(k-1)$-arista conexas para $k \geq 2$.

8. Prueba que:

   (a) Toda gráfica plana es 5-coloreable

   (b) ¿Por qué no puedes usar la técnica de la demostración del inciso anterior para probar que toda gráfica plana es 4-coloreable?

9. Una colección $S_1, S_2, ..., S_k$ para $k \geq 1$ de conjuntos finitos tiene un sistema de representantes distintos si y solo si la unión de cualesquiera j de estos conjuntos contiene al menos j de estos elementos, para cada j tal que $1 \leq j \leq k$.