**Examen General de Teoría de las Gráficas**
Julio 1 de 2014

Deberás resolver 4 ejercicios (y no más) de la siguiente lista. Tienes 4 horas. ¡Suerte!

1. Demuestra que toda gráfica tiene dos vértices con la misma valencia.

2. Sea $G$ una gráfica de tamaño al menos 2. Demuestra que las siguientes condiciones son equivalentes para $G$:
(i) $G$ es conexa y no tiene vértices de corte,
(ii) Cualesquiera dos vértices están en un ciclo,
(iii) Cualesquiera dos aristas están en un ciclo,
(iv) Dados tres vértices $u$, $v$ y $w$, existe una $uw$-trayectoria que pasa por $v$.

3. Sean $k$ y $\ell$ enteros con $1 \leq k \leq \ell$. Construye gráficas $G_1$, $G_2$ y $G_3$ tales que:
(i) $\kappa(G_1) = k$ y $\lambda(G_1) = \ell$,
(ii) $\kappa(G_2) = k$ y $\lambda(G_2 \setminus v) = \ell$, para algún vértice $v$,
(iii) $\kappa(G_3 \setminus u) = k$ y $\lambda(G_3 \setminus uv) = \ell$, para alguna arista $uv$,

4. Sea $G$ una gráfica de orden $n \geq k + 1 \geq 2$ y tamaño al menos $\binom{n}{2} - n + k$. Muestra que $G$ es $k$-conexa a menos que tenga un vértice $v$ de valencia $k - 1$ tal que $G \setminus v \cong K_{n-1}$.

5. Demuestra que toda gráfica $G$ de orden $n$ y valencia mínima $\delta(G) \geq \lfloor (r-2)n/(r-1) \rfloor + 1$ contiene una copia de $K_r$.

6. Demuestra que toda gráfica de orden $n$ y tamaño $m > 3(n+1)/2$ tiene dos vérices que están unidos por tres trayectorias independientes.

7. Demuestra que si $G$ es una gráfica con la propiedad de que cualesquiera dos ciclos impares se intesectan, entonces $\chi(G) \leq 5$.