EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL
SEMESTRE 2017-I

Fecha: Jueves 12 de Enero de 2017.
Duración: 15:00 p.m. a 19:00 p.m.

Resuelva los 4 problemas siguientes. Cada uno de los problemas tiene el mismo valor.

Problema 1. Consideremos las esferas unitarias: $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ y $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ Pruebe que la siguiente aplicación es una submersión entre esferas. $F : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1x_3 + 2x_2x_4, 2x_2x_3 - 2x_1x_4, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$. Encuentre que variedad es cada fibra $F^{-1}(x, y, z)$ donde $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$. Esta submersión es conocida como la fibración de Hopf.

Problema 2. Muestre la formula de Cartan: si ω es una $k-$forma entonces

$$L_X\omega = i(X)d\omega + d(i(X)\omega),$$

donde $(i(X)\omega)(X_1, \cdots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1})$si $k \geq 1$ y $i(X)\omega = 0$ si $k = 0$, es decir si ω es una función.

Problema 3. *Consideramos el plano hiperbólico:*

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

con la métrica riemannianna $g_{(x,y)} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. *Sea* γ *la curva definida por*

$$\gamma(t) = (0, e^t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

Demostrar de dos maneras distintas que γ *es una geodesica.*

1. *Usando la definición de una geodésica como solución de una ecuación diferencial. Para eso pueden usar sin justificar que los simbolos de Christoffel asociados a los campos* $\frac{\partial}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial}{\partial y}$ *estan dados por*

$$\Gamma^x_{xx} = 0, \quad \Gamma^y_{xx} = \frac{1}{y}, \quad \Gamma^x_{xy} = \frac{-1}{y}, \quad \Gamma^y_{xy} = 0, \quad \Gamma^x_{yy} = 0, \quad \Gamma^y_{yy} = \frac{-1}{y}.$$

2. *Demostrando (por un argumento geométrico) que la restricción de* γ *a cualquier subintervalo compacto es minimizante (y aplicando un teorema visto en clase).*

Problema 4. *Muestre que una variedad Riemanniana homogénea es necesariamente completa. Recordamos que* (M, g) *es homogénea si para todo par de puntos* p, q *en* M, *existe una isometría global* $f : M \to M$ *tal que* $f(p) = q$.