Nombre:________________________________
No. de cuenta:________________________________

EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA.

Enero de 2017

Tienen 3.5 horas para resolver el examen
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.

I. Sea Y un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^3$ definido por los polinomios $x^2 - yz$ y $xz - z$. Demostrar que Y es la unión de tres componentes irreducibles. Describa estas componentes y encuentre sus ideales primos.

II. Demostrar que una k-álgebra B es isomorfa a un anillo de coordenadas de algún conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n$, para alguna n, si y sólo si B es una k-álgebra finitamente generada sin elementos nilpotentes.

III. Considere la superficies Q en $\mathbb{P}^3$ definida por la ecuación $xy - zw = 0$.

1. Demuestre que Q es igual al encaje de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, para un sistemas de coordenadas adecuado.
2. Demuestre que Q contiene dos familias de líneas l_i, m_i cada una parametrizada por $t \in \mathbb{P}^1$, con las propiedades que si $l_i \neq l_j$, entonces $l_i \cap l_j =$; si $m_i \neq m_j$, entonces $m_i \cap m_j =$, y para toda t, u tenemos $l_t \cap m_u =$ un punto.
3. Demuestre que Q contiene otras curvas mas allá de las familias de restas del inciso anterior, y deduzca que la topología de Zariski en Q no es homeomorfa via el mapeo de Segre al producto topológico en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

IV. Demostrar que la superficie cuádrica del ejercicio anterior es birracional a $\mathbb{P}^2$, pero no es isomorfa a $\mathbb{P}^2$.

V. Demostrar que un morfismo de una variedad proyectiva a un espacio afín debe de ser constante.