EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL
SEMESTRE 2016-II

Fecha: Viernes 24 de Junio de 2016.
Duración: 15:00 p.m. a 19:00 p.m.

Resuelva 4 de los 5 problemas siguientes. Cada uno de los problemas tiene el mismo valor.

Problema 1. Sea M una variedad orientable con frontera ∂M. Demuestre que ∂M es orientable. Exhiba un ejemplo de una variedad conexa M cuya frontera $\partial M \neq \phi$ sea orientable pero no M.

Problema 2. Pruebe que la siguiente relación define un tensor.

$$N(X,Y) = [J(X), J(Y)] - J([J(X), Y]) - J([X, J(Y)]) - [X, Y],$$

donde X, Y son campos vectoriales y J es un tensor:
$J(fX+Y) = fJ(X)+J(Y)$ y además $J(J(X)) = -X$ para cualquier campo X y función f. El tensor J se conoce como tensor de Nijenhuis.

Problema 3. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ suave en una variedad riemanniana M y sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave. Defina el gradiente de f, $\mathbf{grad} f$, como el único campo vectorial en M tal que $df \ = < \mathbf{grad} f, X >, \forall X \in \chi(M)$.
Suponga que $\mid \mathbf{grad}\ f \mid \equiv a \circ f$. Tales funciones f se llaman transnormales. Demuestre que:
a) si X es un campo vectorial en M ortogonal a $\mathbf{grad} f$ entonces $X \cdot \mid \mathbf{grad}\ f \mid = 0$.
b) las curvas integrales de $\mathbf{grad} f$, parametrizadas a velocidad constante, son geodésicas.

Problema 4. Sea M una variedad riemanniana. Sea $p \in M$, entonces el conjunto de lo primeros puntos conjugados al punto p, para todas las geodésicas que comienzan en p, se llama el lugar conjugado de p y se denota por $C(p)$. Suponga que M tiene curvatura seccional no positiva. Demuestre que, para toda $p \in M$, el lugar conjugado $C(p)$ es vacío. Sugerencia: Suponga la existencia de un campo de Jacobi no trivial a lo largo de la geodésica $\gamma : [0, a] \to M$ con $\gamma(0) = p, J(0) = J(a) = 0$. Use la ecuación de Jacobi para demostrar que $\frac{d}{dt} < \frac{DJ}{dt}, J > \geq\ 0$. Concluya que $< \frac{DJ}{dt}, J > \equiv 0$. Derivando $\parallel J \parallel^2$ muestre que $\parallel J \parallel^2$ es constante, obteniendo una contradicción.

Problema 5. Considere la métrica

$$\langle , \rangle = f(x)dx^2 + h(x,y)dy^2$$

en $\mathbb{R}^2$ donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones C^∞ positivas en su dominio. De explicitamente dos campos vectoriales ortonormales (con respecto a esta métrica) en $\mathbb{R}^2$ y pruebe que las rectas paralelas al eje x parametrizadas con velocidad constante son geodésicas.