EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL
SEMESTRE 2015-I

Duración máxima del examen: 4 horas.

(1) Pruebe que $\mathbb{RP}^m$ es una variedad C^∞.

$$\mathbb{RP}^m = \{[x_0 : \cdots : x_m] | (x_0, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1}\},$$

donde $\pi(x_0, \cdots, x_m) = [x_0 : \cdots : x_m]$ y $\pi : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^m$ es la proyección. Los dominios de las cartas pueden ser $U_j := \pi^{-1}(V_j)$ con $V_j = \{(x_0 : \cdots : x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} | x_j \neq 0\}$.

(2) Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión dos con conexión de Levi-Civita ∇. Un campo vectorial $Z \in \Gamma(TM)$ se dice cerrado y conforme si existe una función lisa $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla_Y Z = \varphi Y$ para todo $Y \in \Gamma(TM)$. Sea $W \in \Gamma(TM)$ tal que $\langle Z, W\rangle = 0$ y $|W| = |Z|$. Pruebe que Z es un campo cerrado y conforme en M si y sólo si W es killing. Se puede usar el criterio que W es killing si $\langle \nabla_X W, X\rangle = 0$ para todo campo vectorial X.

(3) Considere un tensor de tipo $(0, 2)$ covariante A en la variedad Riemanniana (M, g) de dimensión m. Recuerde que $divA(X) = \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} A)(X_i, X)$ donde $X_1, \ldots, X_m$ es un marco local ortonormal.
a) Demuestre que $div(\lambda A)(X) = \lambda divA(X) + A(\nabla\lambda, X)$, donde $\nabla\lambda$ es el gradiente de la función λ.
b) Utilize la identidad $dS = 2divRic$ para verificar que la divergencia del tensor de Einstein $G = Ric - \frac{1}{2}Sg$ es cero, donde Ric es el tensor de Ricci y S es la curvatura escalar.

(4) Considere $\mathbb{R}^2$ con métrica Riemanniana

$$ds^2 = dx^2 + (1 + x^2)dy^2.$$

Usando la formula de Koszul $2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Y g(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$ evalue la conexión de Levi-Civita en los campos coordenados ∂_x, ∂_y, calcule la curvatura seccional, muestre que las rectas $\{y = c\}$ con c constante son geodésicas.

Date: Enero 2015.