Examen General de Geometría Diferencial
Semestre 2014–II
Resuelva los siguientes problemas.
El tiempo para la realización de este examen será de 4 horas sin prórroga.

1. Demuestre que:

   a) Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es una variedad orientable si y solamente si existe un mapeo diferenciable $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $N(p) \perp T_p(S)$ y $\mid N(p) \mid = 1$, para toda $p \in S$.

   b) Sea $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$ el cilindro recto circular. Demuestre que la banda de Moebius, es decir, el espacio que resulta de identificar $(x, y, z) \in C$ con $(-x, -y, -z) \in C$ es una variedad.

   c) Demuestre que la banda de Moebius no es orientable.

2. Sea M una variedad riemanniana y sea p un punto en M. Considere la curva constante $f : [0, 1] \longrightarrow M$ dada por $f(t) = p$ $(0 \leq t \leq 1)$. Sea V un campo vectorial a lo largo de f. Demuestre que

$$\frac{DV}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

   Es decir, en esta situación la derivada covariante coincide con la derivada usual de $V : [0, 1] \longrightarrow T_pM$.

3. Sea M una variedad riemanniana, $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ una geodésica y J un campo de Jacobi a lo largo de γ. Demuestre que existe una superficie parametrizada $f(t, s)$, donde $f(t, 0) = \gamma(t)$ y las curvas $t \mapsto f(t, s)$ son geodésicas tales que

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$$

   Sugerencia: Escoja una curva $\lambda(s)$, $s \in < -\epsilon, \epsilon >$ en M tal que $\lambda(0) = \gamma(0)$, $\lambda^{'}(0) = J(0)$. A lo largo de λ escoja un campo vectorial $W(s)$ con $W(0) = \gamma^{'}(0)$, $\frac{DW}{ds}(0) = \frac{DJ}{dt}(0)$. Defina $f(s, t) = exp_{\lambda(s)} tW(s)$ y verifique que $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial \lambda}{\partial s}(0) = J(0)$ y

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) = \frac{DW}{ds}(0) = \frac{DJ}{dt}(0)$$

4. Sea $\tilde{M}$ un espacio cubriente de la variedad riemanniana M. Demuestre que es posible imponer en $\tilde{M}$ una estructura riemanniana tal que la proyección cubriente $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ es una isometra local. Demuestre que $\tilde{M}$ es completa en esta métrica si y solamente si M es completa.

5. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ con la métrica $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1/z^2$, $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$. Sea $p = (x, y, z) \in M$. Sean $e_1 = \partial/\partial x$, $e_2 = \partial/\partial y$, $e_3 = \partial/\partial z$.

   a) Obtén las curvaturas de Ricci, $Ric_p(e_i)$, para $i = 1, 2, 3$.

   b) Obtén la curvatura escalar $K(p)$.