EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA.

28 de julio de 2016, 10am

Tienen 3 horas para resolver el examen
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.
Resuelva 5 de los siguientes 6 problemas.

I. Descomponga en componentes irreducibles la siguiente variedad

$$\mathrm{V}(y^4 - x^2, y^4 - x^2y^2 + xy^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

II. Sea ϕ el morfismo

$$\begin{aligned} \phi : \quad \mathbb{P}^1 \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{P}^2 \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2) \end{aligned}$$

y $Y := \phi(\mathbb{P}^1)$. Demostrar que $\mathbb{P}^1$ y Y son variedades proyectivas isomorfas, pero sus anillos de coordenadas homogéneos $S(\mathbb{P}^1)$ y $S(Y)$ no lo son.

III. Sean X y Y variedades irreducibles quasi-proyectivas. Demostrar que un morfismo $f : X \to Y$ es un isomorfismo si y sólo si f es un homeomorfismo con respecto a la topología de Zariski y además, para cada punto $p \in X$, el homomorfismo $f^* : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$ dado por $f^*(g) = g \circ f$ es un isomorfismo.

IV. Demostrar que los siguientes conjuntos algebraicos son isomorfos

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = xz = yz = 0\}$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^2 \mid z = xy(x + y) = 0\}$$

V. Demostrar que cualquier isomorfismo $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es una transormación proyectiva inducida por una transformación lineal de $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$

VI. Demostrar que la topología de Zariski en $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ no es el producto topológico de las topologías de Zariski de $\mathbb{A}^1$.