Nombre:______________________________

No. de cuenta:______________________________

EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA.

20 de junio de 2017

Tienen 3.5 horas para resolver el examen.
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.

I. Para un ideal homogéneo $\mathcal{A} \subset S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes

a. $Z(\mathcal{A}) = \emptyset$.

b. $\sqrt{\mathcal{A}} = S$ o $\sqrt{\mathcal{A}} = S_+ = \oplus_{d>0} S_d$, donde S_d es es el espacio de polinomios homogéneos de grado d.

c. $S_d \subset \mathcal{A}$ para alguna $d > 0$.

II. Demuestre que una variedad algebraica $Y \subset \mathbb{P}^n$ es irreducible si y sólo si $I(Y)$ es un ideal primo.

III. Demostrar que el conjunto de todas las cónicas no degeneradas forman un conjunto abierto de Zariski distinto del vacío en el espacio de parámetros $\mathbb{P}^5$ de todas las cónicas. Más aún, demostrar que el conjunto de doble líneas forma un conjunto cerrado de Zariski de $\mathbb{P}^5$ isomorfo a la superficie de Veronese (la imagen del mapeo de Veronese $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$).

IV. Sea C una cónica fija en $\mathbb{P}^2$ sobre $\mathbb{C}$. Demuestre que el conjunto de líneas en $\mathbb{P}^2$ que no intersectan a la cónica en exactamente dos puntos distintos es una subvariedad cerrada de la Grassmanniana $\mathbb{G}(2,3)$ de todas las líneas en $\mathbb{P}^2$.

V. Probar que la imagen del mapeo $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$ dado por $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$ está dada por $V((x^4 - y^3, x^5 - z^3, y^5 - z^4))$