Examen general de geometría algebraica *Enero de 2015*

Nombre de la (el) alumna(o) ______________________________

Escoja y resuelva 5 (y sólo 5) de los problemas siguientes (en los problemas con incisos, cada inciso cuenta como un problema). En todos problemas las variedades son sobre un campo algebraicamente cerrado k.

1. Encontrar las componentes irreducibles del conjunto algebraico afín dado por $\mathcal{V}(x^2 - yz, xz - x) \subseteq \mathbb{A}^3_k$.
2. Si $X = \mathcal{V}(xz - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subseteq \mathbb{A}^3_k$, encuentre una aplicación regular suprayectiva $f : \mathbb{A}^1 \to X$. ¿Es un isomorfismo?
3. Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad afín, demuestre que existe una biyección entre el conjunto de puntos de X y el conjunto de morfismos de k-álgebras $k[X] \to k$.
4. Demuestre que toda cónica proyectiva plana irreducible es isomorfa a la recta proyectiva.
5. Sea $GL_n(k)$ el grupo de matrices invertibles $n \times n$.
   (i) Muestre que $GL_n(k)$ es una variedad afín (es decir, un cerrado en un espacio afín) y calcule su anillo de coordenadas.
   (ii) Muestre que $GL_n(k)$ es liso y calcule su dimensión.
6. Demuestre que todo conjunto finito de puntos de una variedad casiproyectiva $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ está contenido en un abierto afín de X.