Examen General de Geometría Algebraica.

27 Junio 2014

Realizar CINCO de los siguientes seis ejercicios.

A menos que se especifique lo contrario, las variedades estan definidas sobre un campo algebraicamente cerrado de característica 0.

1. Sean $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^2$ las variedades afines definidas por las ecuaciones

$$y^3 = x^2(x^2 - 1), \quad y^2 = x^6 - 1.$$

   (a) Encontrar los puntos singulares de las cerraduras proyectivas de X_1 y X_2.

   (b) Determinar el número de puntos singulares en las explosiones $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ del origen (0,0) en X_1 y X_2 respectivamente.

2. Sea $Y \subset \mathbb{P}^2$ una curva. Probar que $\mathbb{P}^2 \setminus Y$ es afin.

3. Probar que la intersección de n hipersuperficies en $\mathbb{P}^n$ es no vacía.

4. Probar que si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una hipersuperficie de grado $d > 1$ que contiene un subespacio lineal de dimensión $r \geq n/2$, entonces X es no singular.

5. Sea $p \in X$ un punto no singular de una curva X. Sea O_p el anillo local de p y $m_p \subset O_p$ su ideal máximo. Probar que O_p/m_p^2 es un espacio vectorial de dimension 2 sobre el campo de definición de X.

6. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva y sea $Y \subset \nu_d(X) \subset \mathbb{P}^n$ su imagen bajo el mapeo de Veronese. Demuestra que X e Y son isomorfos.