EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA DIFERENCIAL
SEMESTRE 2016-I

Fecha: Miercoles 13 de Enero de 2016.
Duración: 10:00 a.m. a 2:00 p.m.
Cada uno de los cuatro problemas tiene el mismo valor.

Problema 1. *Considere la métrica*

$$\langle , \rangle = f(x)dx^2 + h(x,y)dy^2$$

en $\mathbb{R}^2$ *donde* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones* C^∞ *positivas en su dominio. Dé explicitamente dos campos vectoriales ortonormales (con respecto a esta métrica) en* $\mathbb{R}^2$ *y pruebe que las rectas paralelas al eje* x *parametrizadas con velocidad constante son geodésicas.*

Problema 2. *Sea* $M = S^2 \times S^1 \subset \mathbb{R}^5$ *dada por las ecuaciones*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad u^2 + v^2 = 1$$

Sea $S^4 \subset \mathbb{R}^5$ *la esfera unitaria.*
Sea $p = (0,0,1,0,1) \in M$.
Sea $f : M \subset \mathbb{R}^5 \to S^4 \subset \mathbb{R}^5$ *dada por*

$$f(x,y,z,u,v) = \frac{1}{|(x,y,z,u,v)|}(x,y,z,u,v)$$

(1) *De una carta de* M *alrededor de* p.
(2) *Describa la diferencial de* f *en* p, $df : T_pM \to T_{f(p)}S^4$ *indicando la matriz asociada.*
(3) *Indique si* f *es o no una inmersión, una submersión en* p. *Es un encaje? Justifique su respuesta.*

Problema 3. *Introduzca una métrica Riemanniana en* $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ *de modo que la proyección* $\pi : \mathbb{R}^3 \to T^3$ *dada por*

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = (e^{ix_1}, e^{ix_2}, e^{ix_3})$$

sea una isometría local.

Problema 4. *Considere la variedad* $M = S^2 \times S^1$ *con la métrica producto y el punto* $p = (0,0,1,0,1)$. *Calcule el tensor de curvatura de* M *en* p, *y la curvatura seccional determinada por los vectores tangentes* $\frac{\partial}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial}{\partial u}$.