EXAMEN GENERAL DE GEOMETRÍA ALGEBRAICA.

15 de Enero de 2016

Tienen 3.5 horas para resolver el examen
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.
Resuelva 5 de los siguientes 6 problemas.

I. Encuentra el campo de funciones racionales de la hipersuperficie $X = Z(xy - zw)$ en $\mathbb{A}^4$. ¿Es X biracional a $\mathbb{A}^3$?

II. Sea k un campo de característica distinta a 2. Considere el conjunto cerrado $X \subset \mathbb{A}^3$ definido por las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ y $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$. ¿Cuáles son las componentes irreducibles de X?, justifique su respuesta.

III. Considere el mapeo de veronese $v_2[x_0 : x_1] = [x_0^2, x_1^2, x_0x_1] \subset \mathbb{P}^3$. Demuestre que la curva $v_2(\mathbb{P}^1)$ dada por la imagen de $\mathbb{P}^1$ bajo v_2 no está contenida en ningún plano.

IV. Sean H_i y H_j hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ definidos por $x_i = 0$ y $x_j = 0$, con $i \neq j$. Demostrar que toda función regular en $\mathbb{P}^n - (H_i \cap H_j)$ es constante.

V. Sea $X = \mathbb{P}^1$ y sea Y la imagen del mapeo de Veronose $v_2 : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ definido por $[x : y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$. Demostrar que X es isomorfo a Y $(X \cong Y)$, pero los anillos de coordenadas no son isomorfos, i.e $S(x) \ncong S(Y)$.

VI. Encuentre las singularidades de la cuádrica

$$Q := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{A}^3 \mid x_1^3 - x_2x_3 = 0\} \subset \mathbb{A}^3.$$