EXAMEN GENERAL DE FINANZAS MATEMATICAS

Tiempo de exámen: El examen tiene una duración de 6 horas.

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos, de los cuales al menos un punto tiene que ser acumulado entre los ejercicios de riesgo.

Riesgo

I. (Contagio artificial, seguro de no vida) Sean $X_1, X_2, ...$ variables aleatorias i.i.d. con distribución F y $Y_1, Y_2, ...$ variables aleatorias i.i.d. con distribución G. Ahora se selecciona una de las dos sucesiones aleatoriamente. Con probabilidad p se escoge a X_i y con probabilidad $q = 1 - p$ a Y_i. Sea θ una variable aleatoria tal que $\theta = 1$ con probabilidad p y $\theta = 0$ con probabilidad q, independiente de $\{X_i\}$ y $\{Y_i\}$. Defina

$$Z_k = \theta X_k + (1 - \theta) Y_k,$$

es decir $\{Z_k\}$ es igual a la variable aleatoria $\{X_k\}$ con probabilidad p y a $\{Y_k\}$ con probabilidad q. Demuestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

: 1. $\mathbb{P}(Z_k \leq z) = pF(z) + qG(z)$.
: 2. $\mathbb{P}(Z_1 \leq x, Z_2 \leq y) = pF(x)F(y) + qG(x)G(y)$.
: 3. $\mathbb{P}(Z_1 \leq x, Z_2 \leq x) - \mathbb{P}(Z_1 \leq x)\mathbb{P}(Z_2 \leq x) = pq(F(x) - G(x))^2$.
: 4. Z_1 y Z_2 son independientes si y solo si $F = G$.

Este significa, que si $F \neq G$ entonces los elementos de $Z_1, Z_2, ...$ no son independientes a pesar que los X_i's y los Y_i's lo son.

II. (Agrupación de accidentes) Un accidente nunca viene solo, los accidentes vienen en grupos de tres. Hay muchas dichos al respecto, y en este ejercicio vamos a justificar lo último utilizando el proceso de Poisson.

Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Poisson con intensidad $\lambda > 0$. Se dice que un conjunto de eventos es un conglomorado si la distancia entre ellos es menor de lo esperado. Sean $0 < S_1 < S_2 < ...$ los tiempos de arrivo del proceso Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$. Entonces los eventos $S_i, S_{i+1}, ..., S_{i+k-1}$, $k \geq 1$, constituyen un conglomorado de tamaño k si $S_i - S_{i-1} > \lambda^{-1}$ (λ^{-1} siendo el tamaño promedio entre evento), $S_{i+j} - S_{i+j-1} < \lambda^{-1}$, $j = 1, ..., k-1$ y $S_{i+k} - S_{i+k-1} > \lambda^{-1}$. Sea C la variable aleatoria que nos proporcione el número de eventos en un conglomorado. Supongamos que un conglomorado está por iniciarse, i.e. el tiempo desde el último evento ya ha durado más que tiempo λ^{-1}. Demuestre que la distribución del conglomorado del proceso $\{N_t\}_{t\geq 0}$ satisface

$$\mathbb{P}(C = n) = \mathbb{P}(T \leq \lambda^{-1})^{k-1}\mathbb{P}(T > \lambda^{-1}),$$

y por lo tanto que

$$\mathbb{E}(C) = e = 2.7182....$$

Parece ser una buena aproximación al viejo dicho! Cual es la probabilidad de que habrá más de 3 accidentes en un conglomorado?

Finanzas a tiempo discreto

III. (Opción Asiática.) Considere un modelo bionomial con N-periodos. Una opción Asiática tiene un payoff basado en el precio promedio de la acción, es decir

$$V_N = f\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n\right),$$

donde la función f esta determinada por detalles contractuales de la opción.

- Defina $Y_n = \sum_{k=0}^{n} S_k$ y utilice el lema de independencia para mostrar que el proceso bi-dimensional (S_n, Y_n), $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ es de Markov.
- El precio V_n de una opción Asiática al tiempo n es una función v_n de S_n y Y_n es decir

  $$V_n = v_n(S_n, Y_n), \qquad n = 0, 1, \ldots, N.$$

  De una fórmula para $v_N(s, y)$ y proporcione un algoritmo para calcular $v_n(s, y)$ en términos de v_{n+1}.

IV. Considere un modelo binomial de N periódos con $0 < d < 1 + r < u$, y con

$$\tilde{p} = \frac{1 + r - d}{u - d}, \qquad \tilde{q} = \frac{u - 1 - r}{u - d}.$$

- Sean $M_0, M_1, \ldots, M_N$ y $M'_0, M'_1, \ldots, M'_N$ martingalas bajo la medida libre de riesgo $\tilde{\mathbb{P}}$. Muestre que si $M_N = M'_N$ entonces para cada n entre 0 y N tenemos que $M_n = M'_n$.
- Sea V_N el payoff al tiempo N de un derivado. Defina recursivamente $V_{N-1}, V_{N-1}, \ldots, V_0$ por

  $$V_n = \frac{1}{1+r}\left[\tilde{p}V_{n+1} + \tilde{q}V_{n+1}\right].$$

  Muestre que

  $$V_0, \frac{V_1}{1+r}, \ldots, \frac{V_{N-1}}{(1+r)^{N-1}}, \frac{V_N}{(1+r)^N},$$

  es una martingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$.

- Utilizando la formula de preciación bajo la medida libre de riesgo defina

$$V_n' = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{V_n}{(1+r)^{N-n}}\right], \quad n = 0, \dots, N-1.$$

  Muestre que

$$V_0', \frac{V_1'}{1+r}, \dots, \frac{V_{N-1}'}{(1+r)^{N-1}}, \frac{V_N}{(1+r)^N},$$

  es una martingala.
- Concluya que $V_n = V_n'$ para toda n.

Finanzas a tiempo continuo.

V. Suponga que el precio de una acción esta dada por el movimiento Browniano geométrico, es decir

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

y denotemos por r la tasa de interés. Definimos el precio de mercado de riesgo por

$$\theta = \frac{\alpha - r}{\sigma}$$

y el proceso de densidad de estado de precio por

$$\xi_t = \exp\{-\theta W_t - (r + \frac{1}{2}\theta^2)t\}.$$

- Muestre que

$$d\xi_t = -\theta \xi_t dW_t - r\xi_t dt.$$

- Si X denota el valor del portafolio de un inversionista cuando utiliza una estrategia Δ_t. Entonces

$$dX_t = rX_t dt + \Delta_t(\alpha - r)S_t dt + \Delta_t \sigma S_t dW_t.$$

  Muestre que $\xi_t X_t$ es una martingala. Sea $T > 0$ un tiempo terminal. Muestre que si el inversionista quiere comenzar con un capital inicial X_0 e invertir de tal forma que tenga un valor del portafolio V_T al tiempo T, donde V_T es una variable aleatoria $\mathcal{F}_T$-medible dada, entonces tiene que iniciar con un capital inicial

$$X_0 = \mathbb{E}(\xi_T V_T).$$

  En otras palabras, el valor presente al tiempo cero del pago aleatorio V_T al tiempo T es $\mathbb{E}(\xi_T V_T)$. Esto justifica llamar a ξ el proceso de densidad de estado de precio.

VI. (Put Americano perpetuo pagando dividendos). Considere un put Americano perpetuo en un el precio de un producto según un movimiento browniano geométrico pagando dividendos a tasa constante $a > 0$. El producto esta dado por

$$dS_t = (r-a)S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t,$$

donde $\{\tilde{W}_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano bajo la medida de riesgo neutral $\tilde{\mathbb{P}}$.

- Suponga que adoptamos una estrategia de ejercer el put la primera vez que el precio de la acción esta por debajo de L. Cuál es el valor esperado bajo la medida libre de riesgo del payoff descontado para esta estrategia? Escribalo como una función $v_L(x)$ del precio inicial x. (Hint: Defina la constante
$$\gamma = \frac{1}{\sigma^2}\left(r-a-\frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1}{\sigma^2}\left(r-a-\frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 + 2r}$$
y escriba v_L utilizando γ).
- Determine L_* el valor de L que maximiza el valor esperado bajo la medida libre de riesgo del payoff descontado calculado anteriormente.
- Muestre que, para cualquier precio inicial $S_0 = x$, el proceso $e^{-rt}v_{L_*}(S_t)$ es una supermartingala bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. Muestre que si $S_0 = x > L_*$ y $e^{-rt}v_{L_*}(S_t)$ es parada en el primer instante que el precio de la acción alcanza L_*, entonces la supermartingala parada es una martingala. (Hint: Muestre que
$$r + (r-a)\gamma - \frac{1}{2}\sigma^2\gamma(\gamma+1) = 0).$$
- Muestre que, para cualquier precio inicial $S_0 = x$,
$$v_{L^*}(x) = \max_{\tau\in\mathcal{T}} \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)].$$