Examen General de Finanzas Matemáticas

Enero, 2017
Duración: 8-14 hrs

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Considere un mercado financiero discreto, donde la tasa de interés por periodo es de $r = 2.5\,\%$. Hay una acción cuyo precio a tiempo t es S_t, donde

$$S_{t+1} = \begin{cases} 1.1 S_t & \text{con probabilidad} 0.25 \\ 0.9 S_t & \text{con probabilidad} 0.75 \end{cases}$$

El número de periodos es de 4 y el precio inicial es de $S_0 = 100$.

a) Calcule la medida equivalente de martingala $\mathbb{Q}$ para este mercado.

b) Sea A una opción americana de venta con precio de ejercicio $K = 110$. Calcule el precio inicial A_0 de la opción.

c) Sea $B_t = A_0 \times 1.025^t$ y $D_t = \min(A_t, B_t)$ la opción americana convertible a bono, i.e. el derivado que paga el mínimo entre el americano y B_t, el cual se puede ejercer en cualquier momento. ¿Cuál es el precio D_0?

2. Considere un mercado con dos activos de los cuales el primero es un bono con tasa de interés r y el segundo un activo cuyo precio a tiempo t está dado por

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + \mu + \sigma(X_i - X_{i-1})),$$

donde $\{X_i\}$ es una caminata aleatoria en los enteros. Suponga que

$$1 + \mu + \sigma > 1, \qquad 0 < 1 + \mu - \sigma < 1, \qquad r - \sigma < \mu < r + \sigma.$$

Suponga que el valor del bono a tiempo 0 es 1, entonces

a) Demuestre que no existen estrategias de arbitraje en el mercado.

b) Se agrega una opción de compra con precio de ejercicio α y fecha de expiración T. Demuestre que el precio de la opción (P_3) es

$$P_3 = S_0 \mathrm{Bin}_T \left(\kappa(\alpha), \frac{(1+\mu-\sigma)(1+\lambda\sigma)}{2(1+r)} \right) - \frac{\alpha}{(1+r)^T} \mathrm{Bin}_T \left(\kappa(\alpha), \frac{1+\lambda\sigma}{2} \right),$$

donde $\kappa(\alpha) = \mathrm{argmax}(j | 0 \leq j \leq T, (1+\mu+\sigma)^{T-j}(1+\mu-\sigma)^j > \alpha)$, $\lambda = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2}$ y $\mathrm{Bin}_N(x,p)$ es la función de distribución binomial $\mathrm{Bin}(N,p)$ en x.

Finanzas a tiempo continuo.

3. Un *straddle* es una opción europea construida sobre un subyacente S sintetizada por la compra simultánea de un call y de un put de misma maduración y strike.

    i) Determinar el pay-off de esta opción en el modelo de Black-Scholes. Dar su premio al tiempo t. Dar en particular la fórmula cuando la opción está a la moneda (*at the money*) al tiempo $t = 0$.

    ii) Determinar las ganancias y perdidas máximas que se pueden realizar al comprar tal opción. ¿Cuál es la estrategia de esta opción?

4. Una opción *digital* es una opción europea de pay-off $\mathbf{1}_{S_T > K}$.

    i) Determinar el precio de arbitraje en el modelo de Black-Scholes de tal opción.

    ii) Calcular el delta de una opción digital.

Teoría del Riesgo.

5. Defina $F(x,t) = P(\sum_{i=1}^{N_t} \leq x)$ y observe que $F(x+t,t) = P(S_t \leq x)$. Sea $f(\cdot,t)$ la función de densidad de $F(\cdot,t)$. Sea $\psi(u,T)$ la probabilidad de ruina con horizonte finito $T > 0$. Demuestre que
$$1 - \psi(u,T) = F(u+T,T) - \int_0^T (1 - \psi(0, T-t))\, f(u+t,t)\, dt.$$

6. En el problema de la ruina clásico descrito por un caminante aleatorio obtén la probabilidad de ruina por dos métodos, primero usando análisis de primer paso y después usando propiedades de martingalas.