UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
EXAMEN GENERAL
FINANZAS MATEMÁTICAS
Enero 2014
Duración del examen: 4 hrs y 30 min.
Todos los problemas serán tomados en cuenta de igual forma.

I Derivados en tiempo discreto

1. Plantea el modelo usual de árbol binomial para un subyacente S de n periodos de tal forma que S_0 es el precio inicial, p la probabilidad de que el precio aumente a uS_0, $1-p$ la correspondiente de que baje a dS_0 y r la tasa libre de riesgo. Deduce el procedimiento de valuación para una opción americana usando los supuestos usuales de no arbitraje. Define *ejercicio temprano, región de ejercicio temprano y frontera de ejercicio*. Establece las propiedades de monotonía del precio de una opción de compra con relación al precio y tiempo de ejercicio, volatilidad, tasa libre de riesgo y nivel inicial del activo subyacente. Considera ahora una opción *look back* cuya función de pago está dada por

$$\max_{0\leq k\leq n}(S_k-E),$$

siendo E el precio de ejercicio. Indica cómo modificar el procedimiento anterior para opciones americanas en este caso. Compara los precios de ambos tipos de opciones. Discute, para este último tipo de opción, cḿo se modificaría el procedimiento para i) incluir dividendos y ii)considerar una tasa de interés aleatoria

2. Considera dos tipos de derivado vulnerable, i.e. en los que existe la posibilidad de incumplimiento. El primero es una opción europea en el que la contraparte (emisor de la opción) tiene una probabilidad p_i de incumplir al tiempo de ejercicio. Describe cómo implementar un método Monte Carlo para valuar esta opción. Tomando este procedimiento como base, prueba la fórmula de valuación correspondiente. Para el segundo tipo, considera un derivado de crédito. Proporciona una definición y discute también en este caso la implementación del método de Monte Carlo.

II Derivados en tiempo continuo

1. Define la noción de cobertura y explica en qué consiste un *put* sintético y cómo puede utilizarse para cubrir un portafolio arbitrario. Define las otras sensibilidades (griegas) de una opción y para el caso de una opción de venta deduce las propiedades de monotonía correspondientes estableciendo su signo. Cuando sea posible, explica en términos financieros dichas propiedades.

2. Deduce la ecuación de Black-Scholes usando el lema de Ito y mediante los supuestos usuales de no arbitraje. Obtén la solución de dos formas diferentes. Una haciendo un cambio de variable para reducirla a una ecuación de calor. La

otra utilizando la fórmula binomial discutida en la parte de tiempo discreto y haciendo tender el número de periodos, n, a infinito.

III. Teoría de riesgo

1. Define el problema básico de riesgo en términos de un proceso de ruina. Considera un proceso que describe la tasa de siniestros en un día típico tipo Poisson no homogéneo con una tasa $l(t)$, $0 < t < 24$ en horas .

i Encuentra expresiones para el número esperado de accidentes diarios.

ii Encuentra la probabilidad de que haya exactamente un accidente entre las t_0 y t_1.

Discute cómo fijar una prima adecuada.

2. Describe en qué consiste la teoría de optimización de portafolios de Markovitz para N activos. En particular discute el problema de minimizar riesgo con rendimiento esperado fijo y su dual. Define estrategia, estrategia óptima, frontera eficiente, matriz de covarianzas. Asegúrate de discutir tanto el caso en el que todos los activos son riesgosos como el caso en el que existe un activo libre de riesgo.