Exámen General de Finanzas Matemáticas.

Enero 22, 2016.
Duración: 8-14 hrs.

NOTA: Cada problema contestado correctamente en su totalidad y con solución justificada cuidadosamente, vale un punto. Los puntos serán obtenidos sumando la calificación completa o parcial obtenida en cada ejercicio. La calificación mínima para aprobar es de tres puntos.

Finanzas a tiempo discreto.

1. Considere el modelo binomial a un periodo. Muestre que un mercado sin oportunidad de arbitraje es completo si y sólo si admite una única medida neutral al riesgo.

2. Consideremos un mercado con un activo riesgoso de precio S_t^1 definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, un activo libre de riesgo de precio S_t^0 con $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ y tasa de interés r. Sea $D = \{D_t\}_{t=0,1,\ldots,T}$ el proceso que denota el payoff de un derivado correspondiente al activo riesgoso, H_t el precio descontado de D_t, U_t el capital mínimo que el vendedor de una opción necesita para cubrir la compra eventual y definimos a

$$\tau_{max} := \min(\inf\{t \geq 0 : E[U_{t+1} - U_t | \mathscr{F}_t] \neq 0\}, T),$$

donde $\{\mathscr{F}_t\}$ es la filtración natural generada por el precio del activo riesgoso y D es adaptado a esa filtración. Muestra que τ_{max} es el tiempo de paro optimo más grande. Además, mostrar que un tiempo de paro τ, es optimo si y sólo si $\tau \leq \tau_{max}$ casi seguramente con respecto a $\mathbb{P}$ y $U_\tau = H_\tau$.

Finanzas a tiempo continuo.

3. Bajo la medida libre de riesgo Q, la ecuación diferencial estocástica para el activo subyacente es:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donde r es la tasa de interés neutral al riesgo, σ es la volatilidad constante y W_t es un movimiento Browniano con $W_T - W_t \sim N(0, T-t)$ para $T > t$ y $W_0 = 0$.

a) Usando el lema de Itô muestra que

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)},$$

también encuentra la media y la varianza de $log(S_T) - log(S_t)$.

b) Considerando una opción de compra (call) europea que no paga dividendos sobre el activo subyacente, S_T, con vencimiento al tiempo T, precio de ejercicio K, encuentra la fórmula de Black-Scholes al tiempo 0.

4. Suponga que G es un función del activo subyacente S, el cual sigue un movimiento Browniano geométrico. Suponga que σ_S y σ_G son las volatilidades de s y G, respectivamente. Muestra que, si μ, la tasa de retorno de S, incrementa por una constante λ, entonces la tasa de retorno de G incrementa por $\lambda \frac{\sigma_G}{\sigma_S}$.

Teoría del Riesgo.

5. Sea $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función de utilidad estrictamente creciente. El principio de utilidad cero establece que la prima que debe cobrarse para cubrir un riesgo X es la única solución $\Pi(X)$ de la ecuación

$$E[v(\Pi(X) - X)] = v(0).$$

Demuestre que

1. la prima $\Pi(X)$ es la misma para todas las funciones de utilidad de la forma $av(x) + b$ con $a > 0$ y b arbitraria, ambas constantes.
2. $\Pi(X) \geq E(X)$.
3. si $X = c$ constante, entonces $\Pi(X) = c$.
4. $\Pi(X) = (1/a) \ln E(e^{aX})$ cuando $v(x) = (1/a)(1 - e^{-ax})$, con $a > 0$ constante y suponiendo que $E(e^{aX})$ es finita.
5. si $X \leq_{sl} Y$ entonces $\Pi(X) \leq \Pi(Y)$.

6. Considere el modelo de riesgo de Cramér-Lundberg

$$R_t = u + \beta t - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

en donde $u \geq 0$ es el capital inicial, $\beta > 0$ es una constante, $U_1, U_2, \ldots$ son v.a.s i.i.d. no negativas correspondientes al monto de las reclamaciones y $\{N_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson homogéneo de parámetro $\lambda > 0$ e independiente de las reclamaciones. Suponga que las reclamaciones tienen función de distribución continua $F(y)$ con $F(0) = 0$. Sea τ el tiempo de ruina en este proceso de riesgo. Para cada $z > 0$ defina la función

$$\varphi(u, z) = P(\tau < \infty, -R_\tau > z).$$

Demuestre que

$$\varphi(u, z) = \frac{\lambda}{\beta} \left(\int_{u+z}^{\infty} \bar{F}(y)\, dy + \int_0^u \varphi(u - y, z) \bar{F}(y)\, dy \right).$$