POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

EXAMEN GENERAL

Lunes 19 de junio, 2017

Instrucciones: Resolver todos los problemas
Máximo de tiempo 4 horas

1. Existe una desigualdad que es útil para mostrar unicidad de la solución de un **problema de valores iniciales**. Esta es con $t \geq t_0$,

   $u(t)$ y $v(t)$ funciones continuas

   $u(t) \geq 0 \quad , \quad v(t) \geq 0$

   $u(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)ds, \ K > 0$

   muestre que

   • $u(t) \leq k \ \exp\left(\int_{t_0}^{t} v\,(s)\,ds\right), \ t \geq t_0$

   • ¿Cuándo ocurre la igualdad?

2. **Sistemas no lineales en el plano**.
   Considere una ecuación de segundo orden de la forma:

   $$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

   Con $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas.

   • Enuncie tres condiciones sobre $f(x)$ y $g(x)$ que le permitan afirmar la existencia de un centro en el origen del plano fase.

   • Verifique las condiciones anteriores para decidir si el origen es un centro cuando:

   $$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad , \quad g(x) = \ln(1+x^2)x$$

   Explique su resultado e ilustre la respuesta con un diagrama en el plano fase.

3. Determine los **ciclos límite** del sistema

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

• Explique por qué es importante escribirlo como:

$\dot{r} = r^3\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{r}\right)$

$\dot{\theta} = -1.$

• Explique la estabilidad de los ciclos límite y esboce algunos en el plano fase indicando algunas trayectorias entre ellos.

4. **Teoría de Floquet**

Dado el sistema de Floquet

$$\dot{x} = A(t)x \qquad \text{con} \qquad A(t+T) = A(t),\ -\infty < t < \infty,$$

$A(t)$ matriz periódica con periodo mínimo T

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2} - \cos^2 t & 1 - \left(\frac{3}{2}\right)\ \mathrm{sent}\ \cos t \\ & \\ -1 - \left(\frac{3}{2}\right)\ \mathrm{sent}\ \cos t & -1 + \left(\frac{3}{2}\right)\ \mathrm{sen}^2\mathrm{t} \end{bmatrix}$$

• Encuentre los multiplicadores de Floquet.
• Determine la estabilidad de la solución trivial.
• Muestre que:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -e^{\frac{1}{2}t}\ \cos t \\ e^{\frac{1}{2}t}\ \mathrm{sen\,t} \end{bmatrix}$$

es solución del sistema.

5. Se tienen unas oscilaciones descritas por la ecuación no lineal

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3$$

– Explique qué pasa si $\varepsilon > 0$, o si $\varepsilon < 0$.
– ¿Qué haría para mostrar que la frecuencia de oscilación está relacionada con la amplitud de la forma $w \approx 1 - \dfrac{3}{8}\,\varepsilon\, a_0^2$? a_0 viene de considerar $x(\varepsilon,0) = a_0$, $\dot{x}(\varepsilon,0) = 0$ lo que implica que $x_0(0) = a_0$, $\dot{x}_0(0) = 0$.