Examen General de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

MARTES 17 DE ENERO DEL 2017, de 9:00 a 12:00.

Infromación general: **El examen consta de cuatro incisos. El inciso I tienen asignado a lo mas 2 puntos, el inciso II tienen asignado a lo mas 2.5 puntos, el inciso III vale 3.5 puntos y el IV a lo mas 4 puntos, en todos los casos el total de puntos es si la respuesta es completamente satisfactoria. Para acreditar, el examen deberá reunir al menos 7 puntos. En cada inciso, los subincisos tiene el mismo puntaje.**

I. Conteste lo que se le pide, justifique sus repuestas.

a. Dé un ejemplo de una ecuación diferencial en el plano con un punto singular tipo silla y bosqueje el retrato de fases

b. Dé un ejemplo de una ecuación diferencial en el plano con un punto singular foco atractor y bosqueje el retrato de fases.

c. Si una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en el plano tiene al menos una solución no trivial acotada ¿ como son los valores propios de la ecuación? De un ejemplo y bosqueje el retrato de fases.

e. Dé un ejemplo de ecuación diferencial en el plano cuyo flujo preserva el volumen y bosqueje el retrato de fases.

II. Usando las iteradas del Picard calcule la solución $\varphi(t)$ del sistema lineal con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

que satisface la condición inicial $\varphi(0) = x_0$

Para las siguientes preguntas, considere la ecuación diferencial $\dot{p} = V(p)$, $p = (x, y)$ en el plano dada por el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + x - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} & = & x + y - x^2 y - y^3 \end{array} \right. \qquad (1)$$

La aplicación $\Phi : (t, (x, y)) \mapsto \Phi(t, (x, y))$ denota el flujo de la ecuación (1), $\Phi(\_\,, (x, y))$ es solución del sistema (1) tal que $\Phi(0, (x, y)) = (x, y)$

III. 1. (a) Haz un bosquejo del retrato de fases del sistema.

(b) Indica en él, las soluciones estacionarias y periódicas.

(c) Describa la variedad estable e inestable de las soluciones estacionarias y

(d) Describa graficamente el conjunto de puntos para los cuales la cerradura de su órbita (la imagen de la solución) contiene a la órbita de la solución periódica.

2. (a) Determine las soluciones estacionarias del sistema (1) ($\gamma(t) = (x(t), y(t)) = cte$).

   (b) Determine la ecuación de primera variación

$$\dot{X} = D_{\gamma(t)} V \, X \quad , \quad X \in \mathbb{R}^2 \qquad (2)$$

   a lo largo de la solución estacionaria y encuentre la soluciones φ_1, φ_2 de ésta, con condición inicial en $t = 0$: $\varphi_1(0) = (1, 0), \varphi_2(0) = (0, 1)$.

   (c) Calcule los valores propios de la derivada del flujo $\Phi(t, (x, y))$ con respecto a la posición (x, y) de la ecuación (1) al tiempo $T = 2\pi$ en el punto $(0, 0)$.

   (d) ¿Preserva área, el flujo al tiempo t, $\Phi(t, \;\_\;)$ del sistema, en una vecindad del origen?. Justifica tu respuesta.

   (e) Analice la estabilidad (y estabilidad asintótica) de la solución estacionaria: $\gamma(t) = (0, 0) \; \forall t$. Justifica tu respuesta.

   (f) Determine las variedades estable e inestable de dicha solución.

IV. 1. Determina la solución periódica del sistema: $p(t)$ y su periodo mínimo T positivo.

2. Determine la ecuación de primera variación a lo largo de $p(t)$.

$$\dot{X} = D_{p(t)} V \, X \quad , \quad X \in \mathbb{R}^2 \qquad (3)$$

   a lo largo de la solución periódica $p(t)$.

3. Muestra que la curva $\beta(t) = (-sen(t), cos(t))$ es solución periódica de periódo T de la ecuación de primera variación

4. Determine los valores propios de la matríz de monodromía de la órbita periódica.

   Sugerencia: Para obtener un valor propio, calcule la imagen al periodo T del intervalo abierto $(0, 2) \times \{0\}$, escribiendo la ecuación en coordenadas polares (ρ, Θ) y observando que $\dot{\Theta} = 1$. Obtenga $\dot{\rho}$ y de ésta, obtenga un segundo valor propio.

5. Analiza la estabilidad (estabilidad asintótica) y la estabilidad de Lyapunov de las solución periódica.