Posgrado en Ciencias Matemáticas
Examen General de Ecuaciones Diferenciales Parciales
Fecha: 20 de enero de 2016

Instrucciones:

- Duración: 4 horas.
- Favor de no poner más de un problema por hoja y poner su nombre en cada hoja.

1. Resuelva el problema con valores iniciales,

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 1, \\ u(x,0) &= -\tfrac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Encuentre las curvas características (haga un dibujo) y dé una fórmula explícita para la solución. La solución encontrada, ¿existe para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$? ¿Por qué?

2. Estimación de las derivadas y Teorema de Liouville

(a) Demuestre la siguiente desigualdad:
Sea $u \in C^3(\Omega)$ una función armónica en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Entonces

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{3}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u|$$

para toda $B_R(x_0) \subset \Omega$ y $i = 1, 2, 3$.

(b) Demuestre el teorema de Liouville:
Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u \in C^3(\mathbb{R}^3)$ una función armónica y acotada, entonces u es constante.

3. La solución fundamental del Laplaciano en $\mathbb{R}^2$ es

$$\phi(x) := -\frac{1}{2\pi} \log(|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Demuestre que, si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$ (es decir f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ con soporte compacto) entonces,

$$u(x) := (\phi \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y) f(y)\, dy$$

es una función $C^2(\mathbb{R}^2)$ y

$$-\Delta u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^2.$$

4. Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= 0, && x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde f, g son suaves y de soporte compacto, demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. (*Sugerencia:* Use la fórmula de Kirchhoff.)

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto y con frontera suave $\partial\Omega$. Demuestre que si $u \in C^1(\overline{\Omega} \times (0,T))$ para $T > 0$ fijo, es solución de

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en} \;\; \Omega \times (0,T),$$

tal que satisface las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{en} \;\; \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en} \;\; \Gamma_2, \end{aligned}$$

con $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ entonces

$$\rho(t) = \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$$

es una función no-creciente de t en $(0,T)$.