Posgrado en Ciencias Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

EXAMEN GENERAL

Jueves 15 de enero, 2015

Instrucciones: **Resolver todos los problemas**
Máximo de tiempo 5 horas

1) **Existencia y unicidad**

(a) Mostrar que las condiciones del teorema de existencia y unicidad no se cumplen para el problema de valores iniciales
$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

(b) Notar que $x(t) = 0$, $\forall t$ es una solución al problema,
$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(t_0) = 0.$$
Encontrar analíticamente una solución distinta de la solución $x(t) = 0$, para este problema.

(c) Utilizar las dos soluciones del inciso anterior para construir un número infinito de soluciones de la ecuación
$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

2) **Linealización**

Sea $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ y $y = y(t)$. Considerar la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = y^2.$$

(a) Sea α una constante distinta de cero. Considerar una nueva variable u definida por la transformación $u = y^\alpha$. Encontrar la ecuación diferencial que satisface la función $u(t)$.

(b) Mostrar que, sin importar cómo escojamos la α, no es posible poner la nueva ecuación para $u(t)$ en la forma
$$\frac{du}{dt} = ku,$$
donde k es otra constante (que podría depender de α).

(c) Dar una explicación cualitativa de por que no se puede transformar la ecuación original en una ecuación del tipo de la ecuación del inciso anterior para $u(t)$.

3) **Ciclos límite**

Probar que el sistema
$$\dot{x} = x - y - x^3, \quad \dot{y} = x + y - y^3, x, y \in \mathbb{R}$$
tiene una solución periódica que es atractora global en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Es decir que para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$, el flujo $\phi(t; \xi)$ converge a la órbita periódica.

4) **Teoría de Floquet**

Sea el sistema $\dot{x} = A(t)x$ donde

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular los valores propios de la matriz $A(t)$.

(b) Verificar que $x(t) = e^{t/2}(-\cos(t), \sin(t))$ es una solución al sistema y concluir que los valores propios calculados en el inciso anterior no predicen la estabilidad del sistema.

(c) Encontrar la matriz fundamental y la forma normal de Floquet para el sistema.

5) **Teoría de la bifurcación**

Considerar la familia uno paramétrica de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{s^2 - \cos(\theta)}{s} \\ \frac{ds}{dt} &= -\sin(\theta) - Ds^2 \end{aligned} \tag{0.1}$$

definida en el semi-plano $s > 0$.

(a) Determinar los puntos de equilibrio asumiendo que el parámetro $D \geq 0$.

(b) Clasificar los equilibrios de todos los valores de D en el intervalo $0 \leq D \leq 4$ y determinar todos los valores de D para los cuales hay una bifurcación.