UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

19 de junio de 2017

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Probar que el conjunto de puntos en los que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua es un $\mathcal{G}_\delta$.

2. (6 puntos) Sea $\{b_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de números reales y $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finito. Defina $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles tales que para toda $n \geq 1$, $f_n = b_n$ casi en todos lados con respecto a μ y $f(x) = b_0$ para toda $x \in X$. Demuestre que f_n converge a f casi en todos lados con respecto a μ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} b_n = b_0$.

3. (6 puntos) Sea X un conjunto no vacio, $(Y, \mathcal{B})$ un espacio medible y $T : X \to Y$ una función. Defina
$$T^{[-1]}(\mathcal{B}) = \{T^{[-1]}(B) \subset X \mid B \in \mathcal{B}\},$$
donde $T^{[-1]}(B)$ es la imagen inversa de B bajo T. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función.

   a) Demuestre que $T^{[-1]}(\mathcal{B})$ es una σ-álgebra en X y que es la σ-álgebra en X más chica que hace medible a T.

   b) Demuestre que f definida arriba es medible de $(X, T^{[-1]}(\mathcal{B}))$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, si y sólo si existe una función $g : Y \to \mathbb{R}$ medible de $(Y, \mathcal{B})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tal que $f(x) = (g \circ T)(x)$ para toda $x \in X$.

4. (6 puntos) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $L_p[0,1]$ $(0 \leq p < +\infty)$ que converge casi siempre a una función f que se encuentra en $L_p[0,1]$. Probar que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f en $L_p[0,1]$ si y sólo si $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|_p$.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Encuentre todas las transformaciones de Möbius (también conocidas como transformaciones fraccionales lineales o bilineales) que dejan fijos los puntos $\{0, 1\}$.

2. (6 puntos) Muestre que todos los ceros del polinomio

$$z^5 - z + 16$$

están dentro del anillo $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ y que dos de ellos tienen parte real positiva.

(Para demostrar esta afirmación se puede utilizar el teorema de Rouché y el principio del argumento).

3. (6 puntos) Cada una de las funciones siguientes tiene una singularidad aislada en $z = 0$. Determine si es una singularidad removible, un polo o una singularidad esencial. Si es un polo o una singularidad esencial calcule la serie de Laurent para $0 < |z| < \delta$ ($\delta > 0$).

a) $f(z) = \dfrac{\cos(z^2) - 1}{z^4}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{3+z}{1-z}\right)$

a) $f(z) = z^2 \cos \dfrac{1}{z^4}$

4. (6 puntos) Calcule la integral siguiente usando residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$