VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

30 de junio de 2014

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (9 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y sea $\phi : X \to Y$ una función tal que $\phi(X) = Y$. Demuestre que:

   a) (3 puntos) la familia de conjuntos $\mathcal{B} := \{\delta \subset Y : \phi^{-1}(\delta) \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra.

   b) (3 puntos) la función $\nu(\delta) := \mu(\phi^{-1}(\delta))$ es una medida en el espacio medible $(Y, \mathcal{B})$ y, entonces, $f : Y \to \mathbb{R}$ es ν-medible si y sólo si $f \circ \phi$ es μ-medible.

   c) (3 puntos) $f \in L_1(Y, \nu)$ si y solo si $f \circ \phi \in L_1(X, \mu)$ y se cumple que

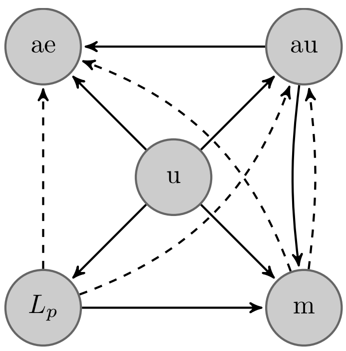
$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ \phi) d\mu \,.$$

2. (3 puntos) Sean μ_1, μ_2, μ_3 medidas en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Pruebe que:

   a) $\mu_1 \prec (\mu_1 + \mu_2)$

   b) Si $\mu_1 \prec \mu_3$ y $\mu_2 \prec \mu_3$, entonces $(\mu_1 + \mu_2) \prec \mu_3$.

3. (6 puntos) En el siguiente diagrama



Los círculos con las letras u, au, ae, m y L_p significan convergencia uniforme, casi uniforme, casi siempre, en medida y en el espacio L_p, respectivamente. Las flechas continuas significan implicación, mientras que las flecha punteadas significan que la implicación es válida para una subsucesión de la sucesión original. Considerando que la medida no es finita, indique cuál flecha es incorrecta en el diagrama y dé un contraejemplo.

4. (6 puntos) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y monótona. Pruebe que si $E \subset [0,1]$ tiene medida de Lebesgue 0, entonces el conjunto $f(E)$ también tiene medida de Lebesgue 0. Esta implicación es una variante débil de la llamada propiedad N de Luzin. Recordemos que una función es absolutamente continua en $[0,1]$ si para cualquier $\epsilon > 0$, existe δ tal que para cualquier familia finita de intervalos (x_k, y_k) de $[0,1]$ que satisfacen

$$\sum_k |y_k - x_k| < \delta \quad \text{se cumple que} \quad \sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon\,.$$

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Sea f una función analítica sobre una curva cerrada γ y en el interior de ésta. Supóngase que $f(z)$ es diferente de cero para toda z sobre y en el interior de γ salvo en el punto a que está en el interior de γ donde la función tiene un cero simple. Demuestre que

$$a = \frac{f'(a)}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{z}{f(z)} dz$$

2. (6 puntos) Pruebe que

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

3. (6 puntos) Sea f una función analítica en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Supóngase que:

   a) existe una constante positiva M tal que, para toda z con $\operatorname{Re} z = 0$, se satisface la desigualdad $|f(z)| \leq M$.

   b) hay una colección de puntos $z_1, \ldots, z_n$ tal que, para toda $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{Re} z_k > 0$ y $f(z_k) = 0$.

   Demuestre la desigualdad

$$|f(z)| \leq M \frac{\prod_{k=1}^n |z - z_k|}{\prod_{k=1}^n |z + \overline{z}_k|}$$

   (Para esta demostración se puede utilizar, por una parte, una transformación bilineal que lleve el semiplano derecho en el interior del círculo unitario y, por otra, el principio del módulo máximo).

4. (6 puntos) Encontrar la parte principal de la serie de Laurent en el punto $z_0 = \infty$ de la función

$$f(z) = (z^3 + z) \ln \frac{z}{1-z}\,,$$

   donde se ha tomado la rama del logaritmo que es real en la parte superior del corte de ramificación $[0,1]$. (Recordemos que la parte principal de la serie de Laurent es la subserie que contiene los términos de potencias negativas).