VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

20 de enero de 2014

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible. Demuestre que:

   a) (3 puntos) Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : X \to \mathbb{R}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ es una sucesión de funciones μ-medibles, entonces $\{x \in X : f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty\}$ está en $\mathcal{A}$.

   b) (3 puntos) Si $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ son dos funciones μ-medibles, entonces $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ está en $\mathcal{A}$.

2. (6 puntos) Demuestre que la conclusión del Teorema de Lebesgue de convergencia dominada sigue siendo válida si en la hipótesis del teorema se sustituye la convergencia casi en todas partes por la convergencia en medida. (Recordemos que la sucesión $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k : X \to \mathbb{C}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, de funciones μ-medibles converge a f en medida μ si para cada $\epsilon > 0$ la sucesión de números

$$\{\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\})\}_{k=1}^{\infty}$$

   converge a 0 cuando n tiende a infinito. Además es sabido que si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a f en medida μ, entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ que converge μ-casi siempre a f).

3. (6 puntos) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable tal que

$$\int_0^t f(x) d\lambda(x) = 0\,, \qquad \text{para toda } t \geq 0\,,$$

   donde λ es la medida de Lebesgue. Demuestre que entonces $f(x) = 0$ para casi toda x. (Para esta demostración se puede utilizar las propiedades de la medida exterior de Lebesgue y el Teorema de convergencia dominada).

4. (6 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable. Demuestre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(xt)d\lambda(x) = 0\,,$$

donde λ es la medida de Lebesgue. (Para la demostración se puede utilizar el hecho de que cualquier función Lebesgue integrable se puede aproximar, en el sentido de la norma L_1, por funciones simples).

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Sea f una función analítica en el interior de una región D. Demuestre:

   a) (2 puntos) Si $\operatorname{Re} f$ es constante en D, entonces f es constante.

   b) (2 puntos) Si $|f|$ es constante en D, entonces f es constante.

   c) (2 puntos) Si $\operatorname{Im} f = 0$ en D, entonces f es constante.

2. (6 puntos) Sea f una función analítica en $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo z en D. Demuestre que si $f(0) = c > 0$, entonces $|f'(0)| \leq 2c$. (Una forma de demostrar esta afirmación se basa en tomar una función h que lleve el eje imaginario al círculo unitario tal que $h(c) = 0$ y entonces se estudia la función $g = h \circ f$).

3. (6 puntos) Evalúe la siguiente integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{1/z^2}}{1-z}dz$$

4. (6 puntos) Demuestre la siguiente afirmación que se debe a Hurwitz. Sea D una región cuya frontera es una curva cerrada simple. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en el interior de D tal que $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \not\equiv 0$ uniformemente en D. El punto interior ζ de D es un cero de f si y sólo si ζ es un punto límite del conjunto de todos los ceros de los elementos de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Un punto que sea cero para una infinidad de n's en la sucesión se considerará punto límite. (Para la demostración se puede utilizar el Teorema de Rouché y las propiedades del límite uniforme de una sucesión de funciones analíticas).