

# Examen de Conocimientos Generales Análisis Numérico

Profesor: Pablo Barrera Sanchez

11 de Enero del 2014

1. Encuentra todas las soluciones de las ecuaciones

a)  $s \oplus 1 = s$

b)  $\epsilon \oplus 1 = 1$

c)  $s \oplus 14.520 = s$

d)  $\epsilon \oplus 14.520 = 14.520$

en  $\text{fl}(10, 5, -100, 100)$ .

2. Enuncie y demuestre el teorema de contracción de mapeo de Banach

3. Si  $x^*$  es un punto fijo de  $g$  y  $g'(x^*) = 0$ , entonces la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

converge cuadráticamente.

4. Calcule las raíces de la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

5. Calcule un spline cuadrático  $b(x)$  definido sobre el intervalo  $[0, 3]$  tal que

$$b(x) = \begin{cases} P_1(x), & x \in [0, 1] \\ P_2(x), & x \in [1, 2] \\ P_3(x), & x \in [2, 3] \end{cases}$$

y además

$$\begin{aligned} b(0) &= b'(0) = 0 \\ b(3) &= b'(3) = 0 \end{aligned}$$

y  $b(x)$  en  $C^1$  en todo  $[0, 3]$ .

6. Si  $f$  es  $C^2$ , entonces demuestre

$$(a) \quad E(f', a, h) := \left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|.$$

(b) Suponga que al evaluar  $f(a)$ , numericamente el valor calculado  $f_c(a)$  satisface

$$\begin{aligned} f_c(a) &= f(a)(1 + \epsilon_1); & |\epsilon_1| &< \epsilon^* \\ f_c(a+h) &= f(a+h)(1 + \epsilon_2); & |\epsilon_2| &< \epsilon^* \end{aligned}$$

entonces demuestre

$$\left| f'(a) - \frac{f_c(a+h) - f_c(a)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} M_1 + \frac{2\epsilon^*}{h} M_2$$

donde

$$M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|; \quad M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$$

y que por consiguiente

$$\left| f'(a) - \frac{f_c(a+h) - f_c(a)}{h} \right| \approx \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{2\epsilon^*}{h} |f(a)|$$

determine el valor óptimo de la función

$$g(h) = \frac{h}{2} |f''(a)| + \frac{2\epsilon^*}{h} |f(a)|$$

7. (a) Demuestre que si  $A_{n \times n}$  es positiva definida, existe  $L_{n \times n}$  triangular inferior tal que

$$A = LL^t.$$

- (b) De un algoritmo para calcular  $L$

- (c) Demuestre que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es positiva definida

8. Explique los conceptos de condición y estabilidad en Análisis Numérico y diga cuando un algoritmo produce resultados precisos.