

Exámen: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Profesor: Dr. Pedro González Casanova
Agosto de 2016

Tiempo de examen tres horas. Resuelva dos de los siguientes tres problemas:

1. Considere el esquema de Crank-Nicolson para la ecuación de difusión $u_t = u_{xx}$, dado por

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = ru_{i-1}^n + (1 - 2r)u_i^n + ru_{i+1}^n$$

donde $r = k/2h^2$, k es el paso de tiempo y h el parametro de malla. Obtenga el orden de consistencia del método y utilice el análisis de estabilidad de Von Neumann para demostrar que el método es incondicionalmente estable. Obtenga explícitamente el factor de amplificación.

2. Dada la ley de conservación

$$u_t + f(x)_x = 0$$

con f convexo, sujeta a las condiciones de Cauchy dadas por

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

- 2.1.-** Describa el algoritmo de Godunov de orden cero en la dirección de viento, (upwind).
 - 2.2.-** Usando los teoremas de Harten y de Lax-Wendroff, demuestre que el algoritmo de Godunov converge a la solución debil.
3. Dado un problema de Poisson con condiciones de Dirichlet bien planteado:
 - 3.1.-** Describa como se resuelve mediante la discretización del Laplaciano de cinco puntos.
 - 3.2.-** Obtenga el orden de consistencia del método.
 - 3.3.-** Obtenga explícitamente los eigenvalores y eigenvectores de la matriz y determine su número de condición. Discuta los resultados y diga si el método es convergente.