Exámen: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

Noviembre de 2014

Tiempo de examen tres horas. Resolver dos de los siguientes tres problemas.

1. Considere el esquema de Crank-Nicolson para la ecuación de difusión $u_t = u_{xx}$, dado por

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1+2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = ru_{i-1}^{n} + (1-2r)u_i^{n} + ru_{i+1}^{n}$$

   donde $r = k/2h^2$, k el paso de tiempo y h el parametro de malla. Obtenga el orden de consistencia del método y utilize el análisis de estabilidad de von Neumann para demostrar que el método es incodicionalmente estable. Obtenga explicitamente el factor de amplificación.

2. Dada le ecuación cuasilineal

$$u_t \ + \ h(u)u_x = 0$$

   sujeta a las condiciónes de Cauchy dadas por

$$u(x,0) = u_0(x)$$

   2.1.- Demuestre como se obtiene la solución implícita de este problema.

   2.2.- Demuestre que si $h' > 0$, y $u_0'(x) < 0$ en algun punto $x \in \mathbb{R}$, existen dos puntos $x_1 < x_2$ para los cuales las características se intersectan en un tiempo finito. Determine explícitamente el tiempo de intersección.

3. Considere la ley de conservación

$$u_t \ + \ f(x)_x = 0$$

   con f convexo, sujeta a las condiciónes de Cauchy dadas por

$$u(x,0) = u_0(x)$$

El esquema de Nessyahu-Tadmor esta dado por:

$$\left\{\begin{array}{c} w_j^{n+\frac{1}{2}} = \bar{w}_j^n - \frac{\lambda}{2} f'(\bar{w}_j^n) w_j' \\ \bar{w}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\bar{w}_j^n + \bar{w}_{j+1}^n\right] + \frac{1}{8}\left[w_j' - w_{j+1}'\right] - \lambda\left[f(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) - f(w_j^{n+\frac{1}{2}})\right] \end{array}\right.$$

Diga como se obtiene este esquema y explique porqué la definición de la pendiente w_j' mediante el limitador MiniMod reduce las oscilaciones de la solución numérica.