Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Examen General (junio2015)

El examen consta de dos partes, la primera debera realizarse el día del examen, la segunda deberá entregarse 72 hrs después .

Parte 1. (Teórica: hacer 4 de 4)

1. Determine la convergencia de los métodos

$$y_{n+2} - (1+\alpha)y_{n+1} + \alpha y_n = \frac{h}{2}\left((3-\alpha)f_{n+1} + (1+\alpha)f_n\right)$$

   para $\alpha = 0$ y $\alpha = -5$

2. El predictor P y el corrector C están definidos mediante sus polinomios característicos como:

$$\begin{array}{ll} P : \rho * (\varsigma) = \varsigma^4 - 1 & \sigma * (\varsigma) = \frac{4}{3}\left(2\varsigma^3 - \varsigma^2 + 2\varsigma\right) \\ C : \rho(\varsigma) = \varsigma^3 - \frac{9}{8}\varsigma^2 + \frac{1}{8} & \sigma(\varsigma) = \frac{3}{8}\left(\varsigma^3 + 2\varsigma^2 - \varsigma\right) \end{array}$$

   (a) Demuestre que para esta pareja es posible aplicar la estimacion del error de Milne para la pareja (P,C) (ver anexo 1)
   (b) Describa el método PECE utilizando tales esquemas
   (c) ¿De qué orden sería el PECE y cuál su constante de error?
   (d) Describa la implementación del predictor corrector con extrapolación en la forma PECLE.

3. Describa los pasos de cálculo del método de Lobatto cuyo arreglo de Butcher es:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

   - Este es un método FSAL (first same as last), ¿qué ventajas da esa característica?
   - Demuestre que es un método de orden 4 (utilice la tabla 5.4 anexa)
   - ¿Es posible obtener un método explicito de 3 pasos que como este sea de orden 4? Justifique

4. Describa qué son y cómo se utilizan las parejas (embedded) de métodos Runge-Kutta para la estimación del error.

   En el caso del método RKF45 que aparece en el anexo ¿a qué es igual dicha estimación?

Parte 2 (práctica: hacer 3 de 4)

4. Aplique los esquemas del problema 1 de la primera parte en el problema $y' = 4xy^{1/2}$ con $y(0) = 1$ en el intervalo [0,2] usando pasos

$$h = 0.1, 0.05, 0.025.$$

   Explique los resultados.

5. El problema

$$y' = -10(y-1)^2,\ y(0) = 2$$

tiene solución exacta $y(t) = (2 + 10x)/(1 + 10x)$.

Usando los esquemas del problema 2 de la primera parte, calcule la solución numérica que se obtiene en $0 \le x \le 0.2$, utilizando valores de inicio exactos y paso h=0.01:

- En modo "hasta convergencia"
- En modo PECE

Compare en cada caso las estimaciones del error con Milne con el auténtico error de truncamiento local que puede obtenerse en cada punto gracias a que se conoce la solución exacta y esto permite aplicar la hipótesis de localización

7. Escriba un programa que implemente el método de lugar de puntos de frontera para encontrar la región de estabilidad absoluta de métodos lineales multipaso y pruébelo en la determinación de la región de estabilidad absoluta de los BDF de 2, 3 y 4 pasos.

8. a. Grafique mediante ”escaneo” la región de estabilidad absoluta del RK clásico de 4o orden

   b. Aplique ese método para resolver el problema y'=Ay, con

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 10 & -30 & -10 \\ -10 & -10 & -30 \end{bmatrix}$$

   y condición inicial y(0)=$[1, 0, -1]^T$

   para h=0.1, 0.08, 0.05, compare con solución analítica y explique los resultados.