Exámen: Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales

24 de noviembre del 2015

Tiempo de examen tres horas.
Resolver los siguientes tres problemas:

Problema 1.- Considere la ecuación de Buckley-Leverett, dada por

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

donde

$$f(u) = \left(\frac{u^2}{u^2 + \mu(1-u)^2} \right). \tag{1}$$

con condiciones iniciales dadas por

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Describa detalladamente cómo se aplica el algoritmo de Godunov para resolver el problema anterior y explique de qué forma se incorpora al algoritmo el hecho de que el flujo no sea convexo.

Problema 2.- Considere la ecuación de calor en $1D$,

$$u_t = bu_{xx}.$$

Diga bajo qué condiciones los siguientes esquemas son estables. Justifique su respuesta.

2.1.- Euler hacia adelante

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t} = b\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\triangle x^2}$$

2.2.- Euler hacia atras

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t} = b\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\triangle x^2}$$

2.3.- Crank-Nicholson

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\triangle t}=\frac{b}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\triangle x^2}+\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\triangle x^2}\right)$$

Problema 3.- Dado un esquema en diferencias finitas de un problema en EDP's bien planteado, diga qué condición debe satisfacerse para que el esquema sea convergente si es consistente. Explique detalladamente su afirmación.