VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

27 de junio de 2016

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Denotemos por $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ a los borelianos de $\mathbb{R}$. Sea $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ un espacio con medida y f una función integrable en $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ (o sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$). Demuestre que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones $\mathfrak{A}$-medibles (o sea $f_n : (\mathcal{X}, \mathfrak{A}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ para toda $n \in \mathbb{N}$) no negativas tal que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu-c.s.} f$$

(f_n converge μ-casi siempre a f cuando $n \to \infty$) y

$$\int_{\mathcal{X}} f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathcal{X}} f d\mu,$$

entonces

$$\int_{\mathcal{B}} f_n d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathcal{B}} f d\mu,$$

para toda $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$.

2. (6 puntos) Considere la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x+2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Es sabido que g, por ser una función no decreciente continua por la izquierda, genera unívocamente a una medida boreliana en $\mathbb{R}$ que denotaremos por μ. Encuentre la descomposición de Lebesgue de μ.

3. (6 puntos) Sea $[a, b]$ un intervalo finito cerrado del eje real y $([a, b], \mathfrak{L}, \lambda)$ el correspondiente espacio con medida de Lebesgue. Demuestre que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue medible (o sea $f : ([a, b], \mathfrak{L}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$), entonces para cualquier $\epsilon > 0$, existe un compacto $K \subset [a, b]$ tal que $\lambda(K^C) < \epsilon$ y $f \restriction_K$ es una función continua. Para demostrar esta afirmación se puede usar el Teorema de Egorov y el hecho de que las funciones $\mathfrak{L}$-simples son densas en el espacio $L_1([a, b], \mathfrak{L}, \lambda)$.

4. (6 puntos) Sea $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$ un espacio con medida, donde $\mathfrak{L}$ es la σ-álgebra donde está definida la medida de Lebesgue λ y existe $C > 0$ tal que $\mu \leq C\lambda$. Demuestre que si f es integrable (o sea $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$), entonces la función

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f d\mu$$

es continua.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Dé un ejemplo de dos elementos de funciones (f_1, D_1) y (f_2, D_2), donde $D_1 \cap D_2$ tenga dos componentes conexas tales que $f_1 = f_2$ en una de ellas y $f_1 \neq f_2$ en la otra.

2. (6 puntos) Calcule

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{e^{1/z} z^n}{1 + z}$$

3. (6 puntos) Demuestre que si una función f es analítica y biyectiva en la región D, entonces $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in D$.

4. (6 puntos) Calcule las siguientes integrales:

   a) (3 puntos) $\displaystyle\int_\Gamma \log(z) dz$, donde Γ es el círculo unitario tomado en el sentido positivo y se escoge la rama del logaritmo natural de forma que $\log(1) = 0$.

   b) (3 puntos) $\displaystyle\int_\Gamma |z| \bar{z} dz$, donde Γ es la curva orientada positivamente y constituida por los puntos $\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$