Vniversidad Nacional
Avtónoma de
Mexico

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

Examen General de Análisis

18 de enero de 2016

Puntos: 48 Duración: 6 horas

- Para aprobar este examen se necesita obtener al menos 24 puntos, entre ellos por lo menos 6 puntos deberán obtenerse de cada una de las dos áreas.
- El estudiante no deberá poner más de un problema en una hoja y su nombre deberá estar escrito en la parte superior de cada hoja.

Análisis Real

1. (6 puntos) Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) (3 puntos) (Desigualdad de Markov) Considérese un espacio con medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{A}$-medible. Para cada $0 < M < \infty$, se cumple:

   $$\mu(\{x \in X : f(x) > M\}) \leq \frac{1}{M} \int_X f d\mu \,.$$

   b) (3 puntos) (Teorema de Tonelli para integrales y sumas) Considérese un espacio con medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($f_k : X \to [0, +\infty] \, \forall k \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles. Se cumple que

   $$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\mu \,.$$

2. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, donde $f_k : X \to [0, +\infty)$ para toda k, una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles. Si f_n converge a f *en medida*, entonces

   $$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

   Esta afirmación se conoce como el lema de Fatou para convergencia en medida.

3. (6 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida tal que $\mu(X) = 1$. Fíjese $p \in (1, +\infty)$.

   a) (3 puntos) Si $f \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $r \in [1, p)$, entonces $f \in L_r(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $\|f\|_r \leq \|f\|_p$.

   b) (3 puntos) Si $f \in L_\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces $f \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ para toda $p \in [1, +\infty)$ y

   $$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$$

4. (6 puntos) Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue integrable tal que

$$\int_0^t f(x) d\lambda(x) = 0 \,, \qquad \text{para toda } t \geq 0 \,,$$

donde λ es la medida de Lebesgue. Demuestre que entonces $f(x) = 0$ para casi toda x.

Análisis Complejo

1. (6 puntos) Sea f una función entera. Demostrar que si existe un número natural n tal que
$$\liminf_{r \to \infty} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^n} < \infty \,,$$
entonces f es un polinomio de grado no mayor a n.

   (Esta afirmación se puede demostrar utilizando el principio del máximo)

2. (6 puntos) Sea P un polinomio de grado n tal que
$$|P(z)| \leq M$$
para todo z en el intervalo $(-1, 1)$. Demostrar que para cada punto ζ fuera de ese intervalo tiene lugar la desigualdad
$$|P(\zeta)| \leq M(a + b)^n \,,$$
donde a, b son los semiejes de una elipse con focos en los puntos -1 y 1 y que intersecta al punto ζ.

   (Para demostrar esta afirmación se puede utilizar el principio del máximo y considerar la transformación
$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) \,,$$
conocida como transformación de Zhukovsky).

3. (6 puntos) Demuestre la siguiente afirmación que se debe a Hurwitz. Sea D una región cuya frontera es una curva cerrada simple. Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en el interior de D tal que $f_k \xrightarrow[k \to \infty]{} f \not\equiv 0$ uniformemente en D. El punto interior ζ de D es un cero de f si y sólo si ζ es un punto límite del conjunto de todos los ceros de los elementos de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Un punto que sea cero para una infinidad de n's en la sucesión se considerará punto límite de los ceros de $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. (Para la demostración se puede utilizar el Teorema de Rouché y las propiedades del límite uniforme de una sucesión de funciones analíticas).

4. (6 puntos) Con ayuda del teorema de los residuos, calcule la integral
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$$