Examen General de Conocimientos,
Álgebra Conmutativa.
Semestre 2018-I.
10 de enero de 2018.

Instrucciones: El examen se deberá resolver en un máximo de 3.5 horas. La calificación mínima aprobatoria es 6. Además, justifica bien todo hecho o afirmación de los que hagas uso.

1. Sea $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in R[x]$. Decimos que f es un polinomio primitivo si el ideal $(a_0, a_1, ..., a_n) = R$. Demuestra que si $f, g \in R[x]$, entonces fg es primitivo si y sólo si f y g son primitivos.

2. Sea I un ideal en R. Demuestra que si $I = rad(I)$, entonces I no tiene ideales primos encajados, i.e., todos los ideales primos en $Ass({}^{R}/_{I})$ son mínimos en ${}^{R}/_{I}$.

3. Sea $\mathfrak{P} \in Spec(R)$. La n-potencia simbólica de $\mathfrak{P}$ es el ideal:
$$\mathfrak{P}^{(n)} = (\mathfrak{P}^{\mathrm{n}} R_{\mathfrak{P}}) \cap R.$$
Demuestra que $\mathfrak{P}^{(n)}$ es un ideal $\mathfrak{P}$-primario.

4. Con la notación del ejercicio 3. Demuestra que $\mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{P}^n$ si y sólo si $\mathfrak{P}^n$ es $\mathfrak{P}$-primario.

5. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos tal que B es un A-módulo plano. Demuestra que f satisface la conclusión del teorema de descenso de Cohen-Seidenberg.

6. Sea A un anillo de valuación de un campo K. Demuestra que todo subanillo de K que contiene a A es una localización de A.