Nombre:____________________________________

No. de cuenta:____________________________________

EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA.

16 de junio de 2017

Tienen 3.5 horas para resolver el examen
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.

I. Si I, J son ideales de un anillo conmutativo A y se define el ideal $(I : J) = \{a \in A : ax \in I, \text{para toda } x \in J\}$, demuestre que $(\sqrt{I} : J) = \bigcap P$, donde la intersección es sobre todos los ideales primos P de A que contienen a I y no contienen a J.

II. Si K es un campo y $A = K[x, y]$ es el anillo de polinomios en dos variables con coeficientes en K, demuestre que el anillo

$$K + Ax = K[x, xy, xy^2, xy^3, \ldots] \subseteq K[x, y]$$

no es noetheriano.

III. Si $p \geq 2$ es un entero primo, para el anillo localizado $\mathbb{Z}_{\{p\}} = \{a/p^n : a, n \in \mathbb{Z}\}$, demuestre que el $\mathbb{Z}_{\{p\}}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{\{p\}}/\mathbb{Z}$ es artiniano.

IV. Sea K un campo, $K(x)$ el campo de funciones racionales en x y $A = K[x, x^{-1}] \subset \mathbb{Q}(x)$ el anillo de polinomios de Laurent con coeficientes en K. Calcule la dimensión de Krull de A.

V. Si K es un campo y A es una K-álgebra de tipo finito que es un dominio entero y $f \in A - \{0\}$, demuestre que para la localización A_f, se tiene que $\dim A_f = \dim A$.