Nombre:____________________________________

No. de cuenta:____________________________________

EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA.

Enero de 2017

Tienen 3.5 horas para resolver el examen
Todos los problemas tienen el mismo puntaje.
Resuelva 5 de los siguientes 6 problemas.

I. El *producto* de dos ideales I y J está definido como el el conjunto de todas las sumas $\sum f_i g_i$ con $f_i \in I$ y $g_i \in J$. Dar un ejemplo en donde $IJ \neq I \cap J$.

II. Sea A es un anillo sin nilpotentes con un número finito de ideales mínimos P_i. Probar que $A \hookrightarrow \oplus_{i=1}^{n} A/P_i$ es inyectivo. Más aún, la imagen tiene una intersección no cero con cada sumando.

III. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos, probar que si N y L son finitos sobre A, entonces también lo es M.

IV. Si A es un anillo de Noether, probar que cualquier homomorfismo de anillos que es suprayectivo $\phi : A \to A$ es inyectivo.
Hint: considere la cadena de ideales $ker\phi \subset ker\phi^2 \subset ...$

V. Encuentre un anillo A y un conjunto multiplicativo S tal que la relación $(a, b) \sim (b, t) \Leftrightarrow at = bs$ no sea una relación de equivalencia.

VI. Encuentre todos los anillos A con la propiedad $\mathbb{Z} \subset A \subset \mathbb{Q}$.
Hint: Para empezar considere el subanillo $\mathbb{Z}[2/3] \subset \mathbb{Q}$, ¿$1/3 \in \mathbb{Z}[2/3]$?