EXAMEN GENERAL DE ÁLGEBRA CONMUTATIVA

POSGRADO DE MATEMÁTICAS DE LA UNAM

Jueves 16 de Enero de 2014

Escoje 5 preguntas de las 6 que siguen.

1. Consideremos el anillo de polinomios en dos variables sobre los complejos $\mathbb{C}[X,Y]$.

   Sea $S = \{X^n Y^m,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}[X,Y]$.

   - Mostrar que $S^{-1}\mathbb{C}[X,Y]$ es isomorfo a $\mathbb{C}[X,Y,X^{-1},Y^{-1}]$.

   - Describir los ideales máximos de $S^{-1}\mathbb{C}[X,Y]$.

2. ¿Cuáles son los ideales primos asociados al $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$?.

3. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Probar que $\mathrm{Spec}(A)$ y $\mathrm{Spec}(A/\sqrt{0})$ son homeomorfos con la topología de Zariski.

4. Sean A un anillo conmutativo con unidad, I y J ideales de A y M un A-módulo.

   - Probar que $(A/I)\otimes_A M$ es isomorfo a M/IM.

   - Probar que $(A/I)\otimes_A (A/J)$ es isomorfo a $A/(I+J)$.

5. Sea k un campo, y sean X y Y dos indeterminadas. Consideremos el álgebra $R = k[X, Y, XY^{-n},\ n \geq 1]$.

   Probar que R no es un anillo Noetheriano.

6. Sean $A \subset B$ dos anillos conmutativos con unidad. Supongamos B entero sobre A.

   Probar que A y B tienen la misma dimensión de Krull.