Examen de admisión de Álgebra Lineal

Mayo 2017

Resuelva los siguientes problemas: 1 o 2, 3 o 4, 5 o 6, y 7. Cuatro en total.

Nota: Solo se calificarán cuatro ejercicios. Si no quiere que alguno de los problemas que haya resuelto se califique, deberá tacharlo o anotar claramente que no debe ser tomado en cuenta.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y T un operador lineal diagonalizable de V. Si W es un subespacio invariante bajo T, demuestre que existe un subespacio U invariante bajo T tal que V es suma directa de W y de U.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y β base de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Si $W = \ker(T - 2I)$, pruebe que no existe un subespacio U invariante bajo T tal que $\mathbb{R}^3$ sea suma directa de W y de U.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(i) Encuentre el polinomio mínimo de A.
(ii) Determine si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
(iii) Encuentre una matriz $Q \in M_3(\mathbb{R})$ invertible tal que $Q^{-1}AQ$ sea triangular superior.

4. Sea V un espacio vectorial, $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y T un operador lineal de V tal que $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{bmatrix}$.

(i) Encuentre el polinomio característico de T.
(ii) Encuentre el polinomio mínimo de T.
(iii) Encuentre un vector $u \in V$ tal que $\{u, T(u), T^2(u)\}$ sea una base de V.

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ con un producto interior, $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V y T un operador lineal de V.

(i) Si $[T]_\beta = (a_{ij})$, pruebe que $a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$.
(ii) Si T^* es el operador adjunto de T, pruebe que $[T^*]_\beta = {}^t\,[T]_\beta$.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con un producto interior sobre $\mathbb{R}$ y W un subespacio de V. Sea T un operador lineal de V de tal forma que si $v = x + y$ con $x \in W$ y $y \in W^\perp$, entonces $T(v) = x - y$.

(i) Demuestre que T es unitario y autoadjunto.
(ii) Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interior canónico y $W = \langle (1, 0, 1) \rangle$. Encuentre la matriz asociada a T con respecto a la base canónica.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y T un operador lineal de V tal que $T^2 = T$.

(i) Pruebe que T es diagonalizable.
(ii) Si R es otro operador lineal de V que cumple que $R^2 = R$, ¿T es semejante a R?, es decir, ¿existe un isomorfismo φ de V tal que $R = \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi$?