Examen de Admisión de Álgebra Lineal

Mayo 2016

Responda cuatro de los siguientes seis ejercicios:

1. Considera W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por

$$X = \{(1, -1, 0, 5, 1), (1, 0, 1, 0, -2), (-2, 0, -1, 0, -1)\}.$$

Encuentra un sistema de ecuaciones lineales $AX = 0$ de modo que W sea el espacio de soluciones del sistema.

2. Sea F un campo, V un espacio vectorial sobre F de dimensión no necesariamente finita, y T un operador lineal en V. Supóngase que existe un polinomio $f(x) \in F[x]$ no cero tal que $f(T) = 0$ y considere $m(x)$ el polinomio mínimo de T sobre F y $d \in F$ una raíz de $m(x)$. Pruebe que d es un valor propio de T.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 4 y T un operador lineal en V. En caso de que exista una base B de V tal que la matriz asociada a T con respecto a la base B sea

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, determine si T es diagonalizable.

4. Sea F un campo, V un espacio vectorial sobre F de dimensión finita, T un operador lineal en V. Suponga que el polinomio característico de T, $p(x)$, es de la forma $p(x) = (x - c)^k g(x)$ con $k \in \mathbb{N}^+$, $c \in F$ y $g(c) \neq 0$, y considere W el espacio de vectores propios asociados a c. Demuestre que:

   (i) La dimensión de W es menor o igual que k.

   (ii) Si la dimensión de W es estrictamente menor que k, entonces T no es diagonalizable.

5. Sea F un campo, V un espacio vectorial sobre F y T un operador en V. Demuestre que si todo subespacio de V es invariante bajo T, entonces T es un múltiplo escalar de la función identidad.

6. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita con un producto interior, y T un operador en V. Demuestre que la imagen del operador adjunto de T es el complemento ortogonal del núcleo de T.