Examen de Diagnóstico de Álgebra Lineal

Noviembre 2015

De la siguiente lista de ejercicios responda los primeros tres y alguno de los ejercicios 4 y 5:

1. Sea F un campo y T un operador lineal de F^n a F^m. Pruebe que existe una matriz A de tamaño $m \times n$ con entradas en F tal que $T(X) = AX$ para toda $X \in F^n$.

2. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ con producto interior $< \quad , \quad >_V$ y $< \quad , \quad >_W$ respectivamente. Considere $T : V \to W$ una transformación lineal suprayectiva de modo que existe $T^* : W \to V$ tal que $< Tv, w >_W = < v, T^*w >_V$ para todas $v \in V$, $w \in W$.

   (a) Pruebe que T^* es inyectiva.

   (b) Pruebe que el núcleo de T y la imagen de T^* son ortogonales.

   (c) Pruebe que V es la suma directa del núcleo de T y la imagen de T^*.

3. Sea F un campo y A una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas en F, tal que $A^2 = A$. Pruebe que A es diagonalizable.

4. Sea F un campo y V un espacio vectorial sobre F. Pruebe que si X es un subconjunto linealmente independiente máximo de V, entonces X es una base de V.

5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con un producto interior, T un operador normal en V y $u, v \in V$ vectores propios de T asociados a diferentes valores propios. Pruebe que u y v son ortogonales.