Examen de Diagnóstico de Álgebra Lineal

Mayo 2015

Responde cuatro de los siguientes ejercicios:

1. Sea F un campo, A y B matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en F.
   (a) Pruebe que si A y B son semejantes, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.
   (b) Pruebe que si A y B son semejantes, entonces A y B tienen el mismo polinomio mínimo.

2. Sea F un campo y A una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas en F. Se dice que A es una matriz ortogonal si y sólo si A es invertible y A^{-1} coincide con la transpuesta de A. Si A una matriz de tamaño 2×2 con entradas en $\mathbb{C}$, demuestre que A es ortogonal si y sólo si es de la forma:
$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ o bien } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$
   con $a^2 + b^2 = 1$.

3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con un producto interior, T un operador lineal unitario en V y $c \in \mathbb{C}$ un valor propio de T. Demuestre que el módulo de c es uno.

4. (a) Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con un producto interior, T y S operadores lineales en V con operadores adjuntos T^* y S^* respectivamente. Pruebe que ST tiene operador adjunto $(ST)^*$ y que $(ST)^* = T^*S^*$.
   (b) Si T es el operador lineal en $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 4z, 3x + 4y + 5z)$, encuentre T^*.

5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Pruebe que si T es un operador lineal en V, las siguientes condiciones son equivalentes:
   (a) $T^2 = id_V$.
   (b) V es la suma directa del núcleo de $T - id_V$ y el núcleo de $T + id_V$.
   (c) Existen W y X subespacios de V tales que $V = W \oplus X$ y $T(w + x) = w - x$ para todas $w \in W$, $x \in X$.