POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
EXAMEN: GENERAL DE CONOCIMIENTOS
MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL
FECHA: 29 DE JUNIO DE 2018

NOMBRE COMPLETO:

§1. Instrucciones

La evaluación consiste de 9 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 29. Para aprobar se debe obtener al menos 18 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (9:00 A. M. a 2:00 P. M.).

§2. Definiciones y notaciones

Sea X un espacio topológico. El símbolo τ_X representa a la topología de X. Dado $A \subseteq X$, denotamos por $\operatorname{cl}_X A$ e $\operatorname{Int}_X A$ (o por $\overline{A}$ y $\operatorname{Int} A$ si no hay riesgo de confusión) a la cerradura y al interior de A en X, respectivamente.

Una colección $\mathscr{V} \subseteq \tau_X$ es llamada *base local para X en $z \in X$* si todos sus elementos contienen a z y para cualquier $U \in \tau_X$ que satisfaga $z \in U$ hay $V \in \mathscr{V}$ con $V \subseteq U$.

Diremos que X es $T_{2\frac{1}{2}}$ si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$ existen $U, V \in \tau_X$ con $x \in U$, $y \in V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Por otro lado, X es *localmente conexo* si para cada $z \in X$ existe $\mathscr{V}_z$, una base local para X en z, de tal modo que todos sus elementos son subconjuntos conexos de X.

Para una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ denotemos por $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ al producto cartesiano correspondiente. La *topología caja* en este conjunto es la que tiene por base a la colección de todos los productos $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, donde cada U_α es un abierto en el correspondiente X_α. El espacio topológico resultante está representado por el símbolo $\mathop{\square}\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Por otro lado, la frase *el producto topológico* $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ significa que hemos equipado al producto correspondiente con la topología usual para éste.

§3. Preguntas

En lo que sigue, $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ es una familia de espacios topológicos.

1. Suponga que los espacios topológicos X y Y están equipados con la topología cofinita y demuestre que estos son homeomorfos si y sólo si tienen la misma cardinalidad.

2. Considere los enunciados siguientes.

(a) El producto topológico $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es $T_{2\frac{1}{2}}$.
(b) Para cada $\alpha \in A$, X_α es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Determine cuáles de las implicaciones (a)→(b) y (b)→(a) son ciertas. En cada caso, justifique su respuesta con una demostración o un ejemplo.

3. Para cada $\alpha \in A$ dé por hecho que $B_\alpha \subseteq X_\alpha$. Haga $X = \mathop{\square}\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ y determine si la igualdad

$$\operatorname{cl}_X \prod_{\alpha\in A} B_\alpha = \prod_{\alpha\in A} \operatorname{cl}_{X_\alpha} B_\alpha$$

es cierta. Justifique su respuesta con una demostración o un ejemplo.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Valor	1	3	3	3	6	3	4	3	3	29
Tu puntaje										

.

4. Demuestre que si f es una función del espacio topológico X en el espacio topológico Y, entonces los enunciados siguientes son equivalentes.

1. Para cualquier H, subconjunto cerrado de X, se tiene que $f(H) = \{f(x) : x \in H\}$ es un subconjunto cerrado de Y.
2. Para cualesquiera $y \in Y$ y $U \in \tau_X$ que satisfagan $f^{-1}\{y\} = \{x \in X : f(x) = y\} \subseteq U$ se sigue que hay $V \in \tau_Y$ con $y \in V$ y $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\} \subseteq U$.

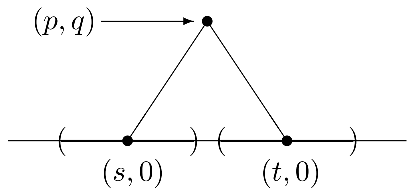
5. Denote por $\mathbb{Q}$ al conjunto de todos los números racionales y haga

$$X = \{(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : q \geqslant 0\}.$$

Dados $(p, q) \in X$ y $\varepsilon > 0$, defina $V_\varepsilon(p, q)$ como sigue.

(i) Cuando $q > 0$, fije $s, t \in \mathbb{R}$ de tal modo que los puntos $(s, 0)$, (p, q) y $(t, 0)$ son los vértices de un triángulo equilátero. Así,

$$V_\varepsilon(p, q) = \{(p, q)\} \cup \{(x, 0) \in X : |x - s| < \varepsilon\} \cup \{(x, 0) \in X : |x - t| < \varepsilon\}.$$



(ii) Si $q = 0$, $V_\varepsilon(p, q) = \{(x, 0) \in X : |x - p| < \varepsilon\}$.

Dé por hecho que $\{V_\varepsilon(z) : z \in X \text{ y } \varepsilon > 0\}$ es base para alguna topología en X de tal modo que, para cada $z \in X$, $\{V_\varepsilon(z) : \varepsilon > 0\}$ es una base local para z en X y haga lo siguiente.

1. Pruebe que X es de Hausdorff.
2. Dados $z \in X$ y $\varepsilon > 0$, dé una descripción geométrica de $\mathrm{cl}_X\, V_\varepsilon(z)$ (diagrama) y argumente geométricamente su respuesta.
3. Demuestre que X es conexo y no es $T_{2\frac{1}{2}}$.

6. Suponga que X es un espacio topológico, que $A \subseteq X$ y que $z \in X$. Considere los enunciados siguientes.

1. Existe una sucesión en A que converge a z.
2. $z \in \mathrm{cl}_X\, A$.

¿Cuáles de las implicaciones (1) $\to$ (2) y (2) $\to$ (1) son ciertas? Justifique su respuesta con una demostración o con un ejemplo.

7. Demuestre que si X es un espacio compacto de Hausdorff sin puntos aislados (esto es, para cada $x \in X$, $\{x\} \notin \tau_X$) y no vacío, entonces X no es numerable.

8. Suponga que f es una función cociente del espacio topológico X en el espacio topológico Y.

1. Pruebe que si X es localmente conexo, entonces Y es localmente conexo.
2. ¿Es cierto que si Y es localmente conexo, entonces X también lo es?

9. Defina, para cada número natural n, $X_n = \mathbb{R}$ (estamos pensando a los reales con la topología usual). Demuestre que el producto caja $X = \mathop{\square}_{n=1}^{\infty} X_n$ no es conexo (*sugerencia*: empiece por argumentar que

$$U = \left\{ \{x_n\} \in X : \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\}$$

es un subconjunto abierto y cerrado de X).