POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
EXAMEN: GENERAL DE CONOCIMIENTOS
MATERIA: TOPOLOGÍA GENERAL
FECHA: 23 DE ENERO DE 2018

NOMBRE COMPLETO:

§1. Instrucciones

El examen consiste de 9 problemas con un puntaje asignado. El total de puntos es 27. Para aprobar el examen se debe obtener al menos 17 puntos. El examen tiene una duración de 5 horas (de 9:00 A. M. a 2:00 P. M.).

§2. Definiciones y notaciones

Sea X un espacio topológico. El símbolo τ_X representa a la topología de X.

El espacio X es *normal* si cualesquiera dos cerrados ajenos de X pueden ser separados mediante abiertos ajenos de X.

Una función $f\colon X \to Y$ entre espacios topológicos se llama *cerrada* si $f(A)$ es cerrado en Y siempre que A es cerrado en X.

El conjunto de números naturales está representado por $\mathbb{N}$. Dados dos conjuntos, A y B, se define $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

§3. Preguntas

1. Sea X un espacio topológico. Para cada $M \subseteq X$ defina

$$M^d = \{x \in X : \forall U \in \tau_X \ (x \in U \Rightarrow U \cap (M \setminus \{x\}) \neq \emptyset)\}$$

y demuestre que los enunciados siguientes son equivalentes.

1. X es T_1.
2. Para cualesquiera $M \subseteq X$ y $x \in X$ se tiene que $x \in M^d$ si y sólo si para todo $U \in \tau_X$ con $x \in U$ se sigue que $U \cap M$ es infinito.

2. Fije un punto p en el conjunto infinito X y defina la topología

$$\tau = \{U \subseteq X : p \notin U\} \cup \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Suponga que $E \subseteq X$ y halle $\operatorname{Int} E$, $\overline{E}$ y $\operatorname{Fr}(A)$ (esto es, el interior, la cerradura y la frontera de E, respectivamente). Justifique, en cada caso, su respuesta.

3. Sean X, un espacio topológico, y $z \in X$. Si $\{U \in \tau_X : z \in U\} = \{X\}$, diremos que z es *un punto indiscreto de* X. ¿Es cierto que los enunciados siguientes son equivalentes? Justifique su respuesta con una demostración o un ejemplo.

1. X es T_0.
2. Para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces existe $z \in \{x, y\}$ de tal modo que z NO es un punto indiscreto.

4. Sean A y B un par de subconjuntos cerrados del espacio topológico X. Demuestre que si $A \cup B$ y $A \cap B$ son conexos, entonces A y B son conexos.

Pregunta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Valor	2	3	2	4	3	3	3	3	4	27
Tu puntaje										

.

5. Sea (X, d) un espacio métrico de tal modo que $d(x, y) \leqslant 1$ siempre que $x, y \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ haga $X_n = [0, 1]$, el intervalo unitario en $\mathbb{R}$ con la topología usual, y considere el producto topológico $Q = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Suponga que $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso de X y defina $f : X \to Q$ mediante

$$f(x) = (d(x, z_1), d(x, z_2), \ldots, d(x, z_n), \ldots), \text{ para cada } x \in X.$$

1. Muestre que si $a \in X$, entonces la función $g : X \to [0, 1]$ dada por $g(x) = d(x, a)$ es continua.
2. Verifique que f es inyectiva y continua.
3. Pruebe que si X es compacto, entonces $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.

6. Sea $f : X \to Y$ una función arbitraria entre espacios topológicos y considere a

$$G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

como subespacio del producto topológico $X \times Y$. Demuestre que si f es continua y cerrada, entonces las funciones $\pi_X : G \to X$ y $\pi_Y : G \to Y$, dadas por

$$\pi_X(x, y) = x \text{ y } \pi_Y(x, y) = y, \text{ para cualquier } (x, y) \in X \times Y,$$

son cerradas.

7. Denote por X al espacio topológico que resulta de equipar al intervalo $[0, \infty)$ con la topología usual y por S a la relación de equivalencia en X dada por la partición

$$\{\{0\}\} \cup \{\{t, 1/t\} : t \in (0, \infty)\}.$$

Pruebe que $F = \{(0, 0)\} \cup \{(t, 1/t) : t \in (0, \infty)\}$ es un subconjunto cerrado del producto topológico $X \times X$, pero la proyección natural $p : X \to X/S$ no es una función cerrada.

8. Suponga que X es un espacio topológico no vacío y denote por $\mathscr{F}$ a la colección de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X. Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $\{U_1, \ldots, U_n\} \subseteq \tau_X$ defina

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \left\{ F \in \mathscr{F} : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } \forall\, i \leqslant n \ (F \cap U_i \neq \emptyset) \right\},$$

y compruebe que $\mathscr{B} = \{\langle V_1, \ldots, V_m \rangle : m \in \mathbb{N} \text{ y } \{V_1, \ldots, V_m\} \subseteq \tau_X\}$ es base para alguna topología en $\mathscr{F}$.

9. Sea X un espacio topológico y, para cualquier $E \subseteq X$, defina $E^+ = E \times \{0, 1\}$.

1. Denote por $\mathscr{F}$ a la colección de todos los subconjunto finitos de X y pruebe que
$$\mathscr{B} = \{\{(x, 1)\} : x \in X\} \cup \{U^+ \setminus (F \times \{1\}) : U \in \tau_X,\ F \in \mathscr{F} \text{ y } F \subseteq U\}$$
es base para alguna topología en X^+. El espacio topológico resultante (*el duplicado de Alexandroff de* X) será denotado por $A(X)$.
2. Responda las preguntas siguientes. En cada caso, justifique su respuesta con una demostración o un ejemplo.
   a) ¿Es cierto que si X es separable, entonces $A(X)$ es separable?
   b) ¿Es cierto que la normalidad de X es equivalente a la normalidad de $A(X)$?