Examen General de Medios Continuos

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los problemas que está resolviendo.

1. Una partícula de masa m se mueve en el plano $\mathbf{R}^2$ bajo la acción de un campo central que se describe por la energía potencial $U(r)$.

   (a) Escriba el Lagrangiano del sistema en coordenadas polares.

   (b) Demuestre que el Hamiltoniano correspondiente es $H(r, \theta, p_r, p_\theta) = (p_r^2 + r^{-2} p_\theta)/2m + U(r)$.

   (c) Indique y justifique las cantidades conservadas del sistema.

   (d) Demuestre que para el potencial $U(r) = a^2 r^2$, a constante, del llamado oscilador armónico, la partícula describe una trayectoria elíptica.

   (e) Resolva las ecuaciones de Hamilton para el potencial que describe la fuerza de atracción gravitacional, $U(r) = -\frac{b}{r}$, $b > 0$.

2. Una partícula de masa $m > 0$ se mueve sobre la recta real, con coordenada x, bajo la influencia de la fuerza
$$F(x) = -\mu x + x^3,$$
donde $\mu \in \mathbf{R}$ es un parámetro.

   (a) Muestre que $x = 0$ es una posición de equilibrio.

   (b) Determine aquellos valores de μ para los cuales el punto de equilibrio $x = 0$ es estable y para estos valores de μ determine el periodo aproximado de pequeñas oscilaciones.

   (c) Considere ahora la evolución de la partícula con las condiciones iniciales
$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1.$$
Determine aquellos valores de μ para los cuales el movimiento de la partícula es periódico.

   (d) Para aquellos valores de μ encontrados en el inciso anterior calcule $\max_{t \in \mathbf{R}} |x(t)|$ y dé una expresión para el periodo (puede dejar su respuesta indicada como una integral).

3. Considere el Lagrangiano
$$L = \frac{1}{2} m(|\dot{\mathbf{q}}_1|^2 + |\dot{\mathbf{q}}_2|^2) - V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \tag{1}$$

que describe el movimiento de dos partículas de masa $m > 0$ en el plano, $\mathbf{q}_j \in \mathbf{R}^2$, $j = 1, 2$, $|\cdot|$ la norma euclideana. Suponemos además que se satisface la restricción $|\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t)| = 2R$ para todo t real, y que

$$V = e(\phi(\mathbf{q}_1, t) - \phi(\mathbf{q}_2, t)), \tag{2}$$

con $e > 0$ constante y $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función dada.

(a) Escriba el Lagrangiano del sistema en las variables de la posición $\mathbf{q} = [x, y]$ del centro de masa, y de un ángulo que describa la orientación en el plano del segmento que conecta los puntos $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$.

(b) Escriba las ecuaciones de Euler-Lagrange, usando la aproximación

$$\phi(\mathbf{q}_j, t) \approx \phi(\mathbf{q}, t) + \langle \nabla\phi(\mathbf{q}, t), (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}) \rangle, \tag{3}$$

suponiendo ademas

$$\nabla\phi(\mathbf{q}, t) = [0, E\mathrm{sen}(k(x - ct))], \tag{4}$$

con E, k, c constantes.

(c) Use la variable $\mathbf{Q} = [X, Y] = (x - ct, y)$ para reducir el problema a un sistema autónomo para X y θ. Identifique los equilibrios de este sistema.

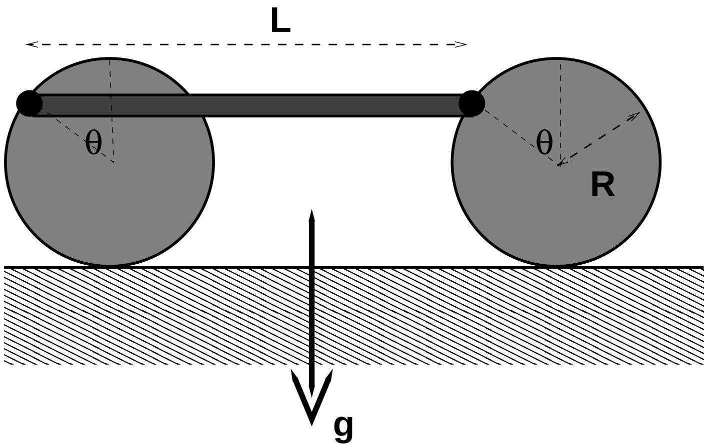
(d) Escriba el sistema reducido para X, θ como un sistema Lagrangiano de la forma $K - U$, cinética menos potencial. Muestre que hay puntos fijos que corresponden a mínimos y máximos locales de U (estables e inestables respectivamente).

4. Dos ruedas de masa M y radio R ruedan sin resbalar bajo la acción de la gravedad. Ambas ruedas están unidas por una barra rigida de longitud L y masa m, la cual está conectada a las ruedas por un eje. La barra siempre se mantiene horizontal tal como se ve en la figura. Considere que no existe disipación por fricción en este problema, que el posible impacto de la barra con el piso no genera fuerzas. (Esta es una geometría simplificada para el mecanismo de trasmisión en locomotoras.)

   (a) Determine el número de grados de libertad que tiene el problema y cuales serían las coordenadas generalizadas.

   (b) Encuentre el Lagrangiano del sistema mecánico.

   (c) Determine los puntos de equilibrio y encuentre la frecuencia de oscilación para pequeños desplazamiento alrededor del punto fijo estable.


L
θ
θ
R
g