Examen General de Medios Continuos - 2018-II

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los problemas que está resolviendo.

1. Considere el Langrangiano

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\epsilon\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

donde $F_{i,j}$ son las entradas de una matriz $n \times n$ real F y ϵ es un parámetro real.

(a) Escriba el Hamiltoniano H del sistema para el caso en que F es simétrica. ¿Qué condiciones sobre F son necesarias para que H esté bien definido?

(b) Sea F simétrica e invertible. Determine la estabilidad del origen. En particular especifique como ésta depende del signo de ϵ y de los valores propios de F.

2. Considere la ecuación de segundo orden no-autónoma

$$u'' + \alpha f(t)u' - u + u^3 = 0, \tag{1}$$

donde f suave y positiva para cada t real, y $\alpha \geq 0$ es una constante.

(a) Haga un dibujo del espacio fase para el sistema con $\alpha = 0$ (caso conservativo).

(b) Sea $\alpha > 0$. Muestre que la energía E del sistema conservativo de (a) se disipa, y que las soluciónes de la ecuación son acotadas para todo $t > 0$.

(c) Considere nuevamente el caso $\alpha > 0$. Sea $u(t)$ una solución cuyas condiciones iniciales satisfacen $u(0) = x > 0$, $u'(0) = 0$ y $E(0) < 0$. Mostrar que existen valores reales x_1 y x_2 con $0 < x_1 < x_2$ tales que

$$x_1 < u(t) < x_2$$

para todo $t > 0$. Indique explícitamente valores de x_1 y x_2 que satisfagan esta última condición.

3. Una partícula P de masa m se mueve en un círculo de radio R y centro O contenido en un plano vertical. La partícula está sujeta a una fuerza misteriosa cuya energía potencial está dada por $W = -k\sin^2\theta$ donde $k > 0$ y θ denota el ángulo entre OP y la recta vertical descendente. Además de la fuerza misteriosa, la partícula P también resiente la fuerza de la gravedad.

(a) Haga un diagrama en donde muestre los puntos donde la fuerza misteriosa se anula y su dirección en los otros puntos.

(b) Encuentre expresiones para las energías cinética y potencial de la partícula (añadiendo la fuerza de la gravedad), y así encuentre el Lagrangiano. Deduzca la ecuación de movimiento de la partícula.

(c) Encuentre los equilibrios del sistema (su número dependerá del valor de k comparado con $\frac{1}{2}mgR$).

(d) Determine la estabilidad de los equilibrios encontrados en el inciso anterior y para aquellos que sean estables determine el periodo aproximado de pequeñas oscilaciones.

4. Un cilindro de radio R contiene en su interior un disco de radio r y masa m con $R > r$. El disco rueda sin resbalar dentro del cilindro y permanece contenido en un plano como se ilustra en la Figura abajo. Suponga que el disco es uniforme y que sobre él actúa la fuerza de gravedad.

   (a) Determine el momento de inercia del disco alrededor del eje que pasa por su centro y es perpendicular a su superficie.

   (b) Escriba el Langangiano del sistema y a partir de él determine la ecuación de movimiento para la posición del centro del disco. Encuentre los equilibrios y la frecuencia del equilibrio estable. Compare con la frecuencia de una masa puntual con masa m restringida a moverse sobre el círculo determinado por la intersección de la superficie del cilindro y el plano que contiene al disco.

   (c) Suponga que la fuerza de reacción que obliga al disco a permanecer tangente al cilindro satisface el principio de d'Alembert; es decir, es normal al cilindro en el punto de contacto y apunta hacia el interior del disco. Determine la magnitud de dicha fuerza y exprese su respuesta en función de la posición y la energía del disco.