Examen General de Medios Continuos 2018-I

El tiempo para resolver el examen es de tres horas y se deben resolver TRES de los cuatro problemas. Cada problema vale 5 puntos. Favor de indicar los problemas que está resolviendo.

1. Una partícula de masa m se mueve en $\mathbf{R}^3$ bajo la acción de la fuerza $F = -kr$, donde $k > 0$ y $r = [x, y, z]^T$ denota el vector de posición de la partícula.

   (a) Suponga que la partícula está restringida a moverse sobre la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Encontrar el Lagrangiano y resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange.

   (b) Suponga ahora que la partícula está restringida a moverse en una superficie más general, definida por $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$, $z \in \mathbf{R}$, donde f es estrictamente positiva, tiene dos derivadas continuas y es $2\pi-$periódica. Encontrar el Lagrangiano y escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange ¿Dónde están los equilibrios ? ¿Qué cantidad determina su estabilidad lineal ? Compare con el caso anterior.

2. Considere un sistema de N partículas de masa m en $\mathbf{R}$, con posición $q_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, N$. La interacción entre las masas se describe por la energía potencial

$$U = \frac{1}{4}k\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{i,j}(q_i - q_j)^2, \tag{1}$$

   donde k es una constante positiva y los coeficientes $c_{i,j}$ son iguales a 1 o 0, y satisfacen las propiedades

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= c_{j,i}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, N\}, \\ c_{i,i} &= 0, \qquad i \in \{1, \ldots, N\}. \end{aligned}$$

   (Los coeficientes $c_{i,j}$ representan la conectividad de un grafo, i.e. especifican si hay un "vértice" o no entre dos "nodos" i, j).

   (a) Sea la matriz $N \times N$, Δ, definida por $\Delta_{i,j} = -c_{i,j}$ si $i \neq j$, y $\Delta_{i,i} = n_i$, donde n_i es el numero de $j \neq i$ que satisface $c_{i,j} \neq 0$. (La matriz Δ es el "Laplaciano del grafo" definido por los $c_{i,j}$). Muestre que el potencial (1) satisface

$$U = -\frac{1}{2}k\langle q, \Delta q\rangle, \tag{2}$$

   donde $q = [q_1, \ldots, q_N]^T \in \mathbf{R}^N$, y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno Euclidiano en $\mathbf{R}^N$.

   (b) Muestre que los eigenvalores de $-\Delta$ son no negativos, y que siempre hay un eigenvalor $\lambda_1 = 0$. Identifique el eigenvector correspondiente.

(c) Considere ahora el Langrangiano

$$L = K - U,$$

donde K es la energía cinética del sistema. Muestre que las ecuaciones de movimiento definen un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de tipo elíptico. Escriba las frecuencias del sistema en términos de los eigenvalores de $-\Delta$.

(d) Considere ahora el sistema $L = K - U - V$, donde

$$V = \sum_{i=1}^{N} q_i^3.$$

Muestre que existen soluciones no-acotadas. (Sugerencia: considere el comportamiento cualitativo de soluciones que satisfacen $q_1(t) = q_2(t) = \cdots = q_n(t)$). Compare con el caso lineal $L = K - U$.

(e) Encuentre un potencial V alternativo de la forma

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_s(q_i),$$

donde V_s una función real, que garantice que las soluciones a las ecuaciones de movimiento correspondientes al Lagrangiano $L = K - U - V$ permanecen acotadas para todo tiempo.

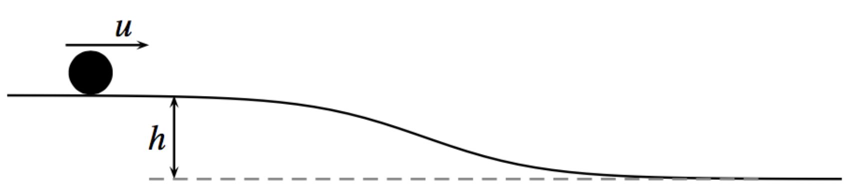
3. (a) Demuestre que el momento de inercia de un disco homogéneo de masa m y radio R alrededor de un eje que pasa por su centro es

$$I = \frac{1}{2} m R^2.$$

(b) Un disco uniforme de masa m y radio R rueda sin resbalar a lo largo de una linea horizontal con velocidad inicial u. El disco encuentra una bajada suave de altura h, después de la cual continúa rodando sin resbalar con velocidad v (las velocidades u y v corresponden a las velocidades del centro del disco). Mostrar que

$$v = \sqrt{u^2 + \alpha g h},$$

donde g es la aceleración de la gravedad y α es una constante positiva. Determine el valor de la constante α.



4. Una barra larga de masa despreciable gira libremente en un plano horizontal con su centro fijo en el origen O del plano. La partícula A tiene masa m y está fija en un punto de la barra a una distancia fija $a > 0$ de O. Una segunda partícula B, también de masa m, se mueve a lo largo de la barra y es atraída por una fuerza elástica k al punto O.

   Sea θ el ángulo entre la barra y el eje de las x en el plano, y sea u la coordenada de la partícula B a lo largo de la barra, donde $u = 0$ corresponde a la configuración en la que la partícula B coincide con O. (Dado que el plano es horizontal, la gravedad no está involucrada).

   (a) Elija coordenadas generalizadas apropiadas y escriba la función Lagrangiana.

   (b) Muestre que el Hamiltoniano del sistema es

   $$H = \frac{1}{2m(a^2 + u^2)} p_\theta^2 + \frac{1}{2m} p_u^2 + \frac{1}{2} k u^2.$$

   Identifique variables cíclicas y las leyes de conservación asociadas. Escriba las ecuaciones de Hamilton.

   (c) Un equilibrio relativo es una solución del sistema a lo largo de la cual u permanece constante. Muestre que a lo largo de un equilibrio relativo p_u también permanece constante. Deduzca una relación entre p_θ y u para que dicha solución sea posible, tratando los casos donde $u = 0$ y $u \neq 0$ por separado ¿En qué rango de valores de p_θ pueden existir equilibrios relativos?

   (d) Tomando $p_\theta = \sigma$ (una constante) escriba el Hamiltoniano resultante en la forma

   $$H_\sigma(u, p_u) = T(p_u) + V_\sigma(u),$$

   donde V_σ es una función de u que depende de la constante σ. Utilice este Hamiltoniano con un grado de libertad para determinar la estabilidad de los equilibrios relativos encontrados en el inciso anterior (su respuesta debe depender de σ).