EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2019-I
18 DE ENERO DE 2019

Duración: 6 horas
Instrucciones:
1. La calificación aprobatoria mínima es 5.
2. Cada problema vale 1 punto.
3. Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
4. Pueden suponer cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea Z una variable aleatoria no negativa definida en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \geq n\}) \leq \mathbb{E}(Z) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \geq n\}).$$

Por lo tanto, $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \geq n\}) < \infty$. *Sugerencia:* Defina para cada entero $n \geq 1$, $f_n(\omega) = Z(\omega) 1_{\{w \in \Omega \mid n-1 \leq Z(\omega) < n\}}$, use el Lema de Beppo-Levi, y acote por arriba y por abajo la integral de f_n con respecto a $\mathbb{P}$.

Problema 2. Sea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria. Para $\alpha > 0$ defina el conjunto $A_n^{\alpha} = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \alpha\}$. Pruebe que:

1. Ocurre que $\{w \in \Omega \colon X_n(w) \text{ no converge a } X(w)\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \limsup_{n \to \infty} A_n^{\frac{1}{p}}$.
2. X_n converge casi seguramente a X si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\Big(\limsup_{n \to \infty} A_n^{\varepsilon}\Big) = 0$.

Problema 3. Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Sea $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ para $t \in \mathbb{R}$ la función característica de la variable aleatoria X.
i) Demuestre que $\varphi_X(0) = 1$ y que $|\varphi_X(t)| \leq 1$ para toda $t \in \mathbb{R}$.
ii) Suponga que para alguna $t_0 \neq 0$ se tiene que $|\varphi_X(t_0)| = 1$. Entonces X es una variable aleatoria discreta. Para demostrar esto:

1. Verifique que puede escribir $\varphi_X(t_0) = e^{it_0\xi}$ para alguna $\xi \in \mathbb{R}$. Recuerde que el conjunto de números complejos con norma uno es el círculo unitario con centro cero.
2. Si F_X es la función de distribución de X observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(t_0(x - \xi))] dF_X(x) = 0. \tag{1}$$

   Sugerencia: Use que $e^{it_0\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_0 x} dF_X(x)$, y la igualdad $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ para z complejo.
3. Utilizando el hecho de que la función $h(x) = 1 - \cos(t_0(x - \xi))$ es continua y no negativa, vea que la ecuación (1) se cumple si y sólo si F_X es un función de distribución escalonada con posibles saltos únicamente en alguno(s) o todos los puntos de la forma

$x_k = \xi + (2\pi/t_0)k$, donde k es un entero. *Sugerencia:* Encuentre todos los ceros de la función h, y use propiedades básicas de la integral.

Problema 4. Sea F la función de distribución de una variable aleatoria no-negativa X y sea $m_X(\lambda) = \mathbb{E}\big(e^{\lambda X}\big)$ para λ real, su transformada de Laplace. Sea T una variable aleatoria exponencial de media 1 independiente de X. Considere $\beta \in (0,1)$.

1. Calcule $\mathbb{E}\big(T^\beta\big)$ y vea que dicha cantidad es finita.
2. Pruebe que
$$1 - m_X(\lambda) = \mathbb{P}(T \leq \lambda X) = \mathbb{E}\big(\overline{F}(T/\lambda)\big)\,.$$
3. Suponga que $\overline{F}$ tiene colas pesadas: existe $\beta \in (0,1)$ tal que $\overline{F}(x) \sim cx^{-\beta}$ conforme $x \to \infty$ (es decir, $\lim_{x\to\infty} \overline{F}(x)x^\beta = c$). Pruebe que:
$$1 - m_X(\lambda/n) \sim \mathbb{E}\big(T^{-\beta}\big)\,\lambda^\beta/n^\beta$$
y deduzca que si $X_1, \ldots, X_n$ son copias independientes de X entonces $[X_1 + \cdots + X_{n^\beta}]/n$ converge en distribución a una variable aleatoria cuya transformada de Laplace es $\lambda \mapsto e^{-\Gamma(1-\beta)\lambda^\beta}$. *Sugerencia:* Escriba $m_X(\lambda/n)^{n^\beta} = [1 - (1 - m_X(\lambda/n))]^{n^\beta}$.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5. Sea $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables independientes tales que
$$\mathbb{P}\big(X_n = n^2\big) = \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\left(X_n = -\frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$
Calcule $\mathbb{E}(X_n)$ y $\mathbb{E}(|X_n|)$. Defina $S_0 = 0$ y $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Pruebe que S_n es una martingala y que $S_n \to -\infty$ casi seguramente.

Problema 6. Sean $T_1, T_2, \ldots$ los eventos correspondientes a un Proceso Poisson con tasa C. Suponga que existe una función $\lambda : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\lambda(t) \leq C$ para todo $t \geq 0$. Para cada evento T_i, se decide conservar el evento con probabilidad $\frac{\lambda(T_i)}{C}$ y con probabilidad complementaria se elimina. Este procedimiento se realiza de forma independiente entre los eventos. Sean $T_1^*, T_2^*, \ldots$ los eventos que se conservaron. Pruebe que tales eventos conforman un proceso Poisson no homogeneo con función tasa $\lambda(t)$.

Problema 7. Tiene N libros dentro de una hilera en un librero, con etiquetas $1, 2, \ldots, N$. Se elige un libro al azar de forma equiprobable y se coloca a la izquierda de todos en el librero. Se repite el procedimiento, de forma independiente. Construya una Cadena de Markov que toma valores en el conjunto de todas las permutaciones de los libros. Muestre que esta cadena es irreducible, aperiódica y encuentre la distribución estacionaria.

Problema 8. Sea B un movimiento browniano en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\mathcal{F}_t$ la filtración canónica generada por B. Sea $\mathbb{Q}$ una medida de probabilidad tal que, para todo $A \in \mathcal{F}_t$,
$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\Big(\mathbf{1}_A e^{\alpha B_t - \alpha^2 t/2}\Big)\,.$$
Pruebe que B es un proceso gaussiano bajo $\mathbb{Q}$ y calcule sus funciones de medias y de autocorrelación. ¿Puede identificar la ley de B bajo $\mathbb{Q}$?