EXAMEN GENERAL DE PROBABILIDAD 2018-I
22 DE ENERO DEL 2018

Duración: 6 horas
Instrucciones:

(1) La calificación aprobatoria mínima es 5.
(2) Cada problema vale 1 punto.
(3) Los incisos de cada problema se califican independientemente y tienen el mismo valor.
(4) Pueden asumir cierto el inciso anterior, aún sin resolverlo, para responder a los que siguen.

1. Probabilidad

Problema 1. Sea (ξ_n) una sucesión de variables aleatorias independientes tales que

$$\mathbb{P}(\xi_n = -n) = 1 - \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\big(\xi_n = n^3 - n\big) = \frac{1}{n^2}.$$

¿Converge la serie $\sum_n \xi_n/n$ casi seguramente? ¿Es necesaria la independencia?

Problema 2. Sean $(X_i, i \in \mathbb{N})$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y estrictamente positivas. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Considere una función $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ que sea decreciente y que satisfaga $g(\infty) = 0$, $g(0+) \leq \infty$ y

$$\text{para cualquier } y \in (0, \infty) \text{ el límite } \lim_{x \to \infty} \frac{g(x+y)}{g(x)} = c(y) \text{ existe y } c(y) \in (0, \infty).$$

Vea que $g(x) = x^n$ satisface las condiciones si $-n \in \mathbb{Z}_+$. Con dicha condición, pruebe que $\sum_n g(S_n) < \infty$ si y sólo si $\sum_n g(S_{n+m} - S_m) < \infty$. Pruebe finalmente que

$$\mathbb{P}\left(\sum_n g(S_n) < \infty\right) \in \{0, 1\}.$$

Problema 3.

(1) Sea $X \in L_2$. Pruebe que:

$$\mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})]^2\big) \leq \mathbb{E}\big([X - \mathbb{E}(X)]^2\big).$$

(2) Sean $X, Y \in L_2$ pruebe que

$$\mathbb{E}(XY \mid \mathscr{G})^2 \leq \mathbb{E}\big(X^2 \,\big|\, \mathscr{G}\big)\, \mathbb{E}\big(Y^2 \,\big|\, \mathscr{G}\big) < \infty.$$

Problema 4. Sean (X_i) variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con valores reales, acotadas (ó pertenecientes a L_3), centradas y de varianza unitaria. Sean (Z_i) variables aleatorias gaussianas estándar independientes (entre si y de las X_i). Defina las sumas parciales $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $T_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. ¿Cuál es la distribución de $T_n/\sqrt{n}$? Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in C_b^3$. La identidad

$$f\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{m=1}^{n} f\left(\frac{T_{m-1} + Z_m + S_n - S_m}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{T_{m-1} + X_m + S_n - S_m}{\sqrt{n}}\right)$$

se conoce como truco de reemplazo de Lindeberg. Interpretelá, justífiquela y, al tomar esperanzas de ambos lados y aplicar una expansión de Taylor (alrededor de $T_{m-1}+S_n-S_m$), verifique que del lado derecho quedan sumandos de orden $n^{-3/2}$. Deduzca el teorema límite central para $(S_n/\sqrt{n})$. *Sugerencia:* Puede utilizar el hecho siguiente: si X y Y son variables aleatorias reales y $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$ para toda $f \in C_b^3$ entonces X y Y tienen la misma distribución.

2. Procesos Estocásticos

Problema 5.
Considere un espacio de probabilidad con una filtración $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ y una sucesión de eventos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $A_n \in \mathcal{F}_n$. Al seguir las indicaciones, pruebe que casi seguramente:

$$\{A_n \text{ i.o. }\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(1_{A_n}|\mathcal{F}_{n-1}) = \infty \right\}.$$

(1) Para $n \geq 1$ defina $M_n := \sum_{k=1}^{n}[1_{A_k} - \mathbb{E}(1_{A_k}|\mathcal{F}_{k-1})]$. Pruebe que M_n es una martingala tal que $|M_{n+1} - M_n| \leq 1$ para toda n,

(2) Para m natural defina los tiempos de paro $\tau_m := \inf\{n : M_n \geq m\}$ y los procesos M^{τ_m} por $M_n^{\tau_m} := M_{n\wedge\tau_m}$. Utilice que M^{τ_m} es una martingala y el inciso anterior para concluir que M converge casi seguramente en el conjunto

$$\left\{ \sup_{n\geq 1} M_n < \infty \right\} = \bigcup_{m\geq 1} \{M \equiv M^{\tau_m}\}.$$

(3) Concluya el resultado, utilizando los incisos anteriores.

Problema 6. Sea $S = (S_i, i \geq 1)$ una sucesión iid con valores en $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ y media finita μ. Sea R el proceso de tiempos residuales del proceso de renovación con tiempos interarribo S.

(1) Pruebe que R es una cadena de Markov.

(2) Especifique su matriz de transición y pruebe que la distribución

$$\pi_i = \frac{\mathbb{P}(S_1 \geq i)}{\mu}$$

es invariante.

Problema 7. Sean $S_1, S_2, \ldots$ variables aleatorias independientes y exponenciales de parámetro λ. Sean $T_0 = 0$ y $T_n = S_1 + \cdots S_n$ para $n \geq 1$.

(1) Pruebe que para toda $t \geq 0$, casi seguramente $\{n \in \mathbb{N} : T_n > t\} \neq \emptyset$.

(2) Construya al proceso

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} : T_n > t\}$$

y sea $\mathscr{F}_t = \sigma(N_s : s \leq t)$. Pruebe que $\lim_{t\to\infty} N_t/t = \lambda$ casi seguramente.

Problema 8. Sea $(B_t, t \geq 0)$ un movimiento Browniano 1-dimensional y $S_t = \sup\{B_s, s \leq t\}$, $t \geq 0$. Sea $T_a = \inf\{t \geq 0, B_t = a\}$ el tiempo de arribo al nivel $a \geq 0$ por el movimiento browniano.

(1) Utilice el principio de reflexión para demostrar que S_t y $|B_t|$ tienen la misma ley para cada $t \geq 0$.

(2) Mostrar que T_a y $\frac{a^2}{B_1^2}$ tienen la misma ley.