Examen General de Teoría de las Gráficas

Duración: 4 horas. Responder 6 de los siguientes 9 ejercicios (si se entregan más de 6 ejercicios, se calificarán los 6 primeros).

1. Demuestra que si G no tiene ciclos de longitud impar, entonces G es bipartita.

2. Sea $K_{s,t}$ la completa bipartita, con $2 \leq s \leq t$. Demuestra que $K_{s,t}$ es hamiltoniana si y sólo si $s = t$.

3. Demuestra lo siguiente:

   a) Si G es regular, entonces $\alpha(G) \leq \frac{n}{2}$

   b) Si G no tiene vértices aislados, entonces $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$

4. Demuestra el teorema de Berge: Un apareamiento M de una gráfica G es máximo si y sólo si G no contiene trayectorias aumentantes.

5. Demuestra que toda gráfica plana es 5-coloreable.

6. Demuestra que toda gráfica bipartita es perfecta.

7. Sea G una gráfica k-conexa y $x, x_1, \ldots, x_k \in V(G)$, entonces existen k xx_i-trayectorias internamente ajenas, $1 \leq i \leq k$. (Lema de Fan).

8. Demuestra el teorema del flujo máximo y corte mínimo: En cualquier red, el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

9. Demuestra que el número de Ramsey de una gráfica cumple lo siguiente:

   $R(p_1, p_2) \leq R(p_1, p_2 - 1) + R(p_1 - 1, p_2)$.