

**EXAMEN GENERAL
TEORIA DE GRAFICAS**

Junio de 2017

La calificación de este examen será sobre siete.

Escoge siete de las siguientes nueve preguntas:

1. Prueba los siguientes incisos:

- (i) Prueba que si una gráfica G de orden n es autocomplementaria entonces $n \equiv 0$ ó $n \equiv 1 \pmod{4}$.
- (ii) Construye gráficas autocomplementarias para todo $n \equiv 0$ y $n \equiv 1 \pmod{4}$.

2. Sea G una gráfica no-completa de orden n y sea k entero tal que $1 \leq k \leq n - 1$. Prueba que si:

$$\deg(v) \geq \lceil \frac{n+k-2}{2} \rceil,$$

para todo vértice v de G , entonces G es k -conexa.

3. Sea G una gráfica k -conexa y v, v_1, v_2, \dots, v_k son $k + 1$ vértices distintos de G , entonces existen vv_i -trayectorias internamente ajenas ($1 \leq i \leq k$), (aquí solo puedes asumir que el Teorema de Menger es cierto, lo demás que necesites es necesario probarlo).

4. Sea G una gráfica bipartita con conjuntos partitos U y W tales que $|U| = |W| = k \geq 2$. Prueba que si $\deg(v) > \frac{k}{2}$ para todo $v \in G$, entonces G es hamiltoniana.

5. Prueba que el centro de todo torneo fuerte contiene al menos tres vértices.

6. Una gráfica G es **Plana Exterior (outerplanar)** si puede dibujarse en el plano de manera que todos sus vértices estén en la frontera de la cara exterior. Prueba los siguientes incisos:

- (a) Prueba que G es plana exterior si y solo si $G + K_1$ es plana.
- (b) Prueba que G es plana exterior si y solo si no contiene como subgráficas ni a K_4 ni a $K_{2,3}$ ni subdivisiones de ellas.
- (c) Si G es una gráfica plana exterior de orden $n \geq 2$ y m aristas entonces $m \leq 2n - 3$.

7. Prueba que toda gráfica k -cromática crítica es $(k - 1)$ -arista conexa para $k \geq 2$.

8. (a) Prueba que toda gráfica G con m aristas que cumple que:

$$m > \Delta(G)\beta_1(G),$$

es de clase dos.

(b) Determina la clase de $K_{r,r}$.

9. Prueba que:

- (a) Toda gráfica plana es 5-coloreable.
- (b) ¿Por qué no puedes usar la técnica de la demostración del inciso anterior para probar que toda gráfica plana es 4-coloreable?.