Examen General de Geometría Diferencial - 2017-2

Miercoles 14 de junio del 2017

El examen dura **4 horas.** Resuelva 4 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, a_0, \ldots, a_{n-1}) \, : \, x, a_i \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ es una subvariedad de codimensión 1 en $\mathbb{R}^{n+1}$ y es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 2. Demostrar que si α es una $(n-1)$-forma con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ entonces α satisface $\int_{\mathbb{R}^n} d\alpha = 0$.

Ejercicio 3. Sea X un campo vectorial C^∞ en un abierto U de $\mathbb{R}^n$. Sea p un punto de U donde $X(p) \neq 0$. El objetivo del ejercicio es demostrar que existe un difeomorfismo G de una vecindad de p sobre una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^n$ tal que G_*X sea un campo constante. Por ejemplo siempre se puede construir G tal que $G_*X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Escribimos

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Como $X(p) \neq 0$ uno de los $X_j(p)$ es distinto de 0. Suponemos $X_1(p) \neq 0$. Sea $(t, q) \mapsto \varphi^t(q)$ el flujo de X. Está definido en una vecindad de $(0, p) \in \mathbb{R} \times U$.
a. Sea F el mapeo definido en una vecindad de p por $F(q_1, \ldots, q_n) = \varphi^{q_1 - p_1}(p_1, q_2, \ldots, q_n)$. Demostrar que F es un difeomorfismo local de una vecindad de p sobre una vecindad de p.
b. Demostrar que $F_*(\frac{\partial}{\partial x_1}) = X$.

Ejercicio 4. Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión dos con conexión de Levi-Civita ∇. Suponga que M admite dos campos vectoriales X, Y independientes (i.e. tales que para todo $p \in M$, los vectores $X(p)$ y $Y(p)$ son linealmente independientes) que satisfacen

$$g(X/|X|, Y/|Y|) \text{ es constante}, \ \nabla_X X = \lambda X, \ \nabla_Y Y = \mu Y,$$

donde $\lambda, \mu \in C^\infty(M)$.
a. Denotemos $X_1 := X/|X|$ y $Y_1 := Y/|Y|$. Demostrar que $\nabla_{X_1} X_1 = \nabla_{Y_1} Y_1 = 0$ y deducir que las curvas integrales de X_1 y Y_1 son geodésicas.
b. Demostrar que M tiene curvatura constante cero. *Indicación:* deducir de $g(X_1, Y_1) =$ *constante* y del inciso anterior que $\nabla X_1 = \nabla Y_1 = 0$.

Ejercicio 5. Sea (M, g) una variedad Riemanniana de dimensión m. Considere el tensor de Einstein $G = Ric - \frac{1}{2} s g$, donde Ric es el tensor de Ricci y s es la curvatura escalar. Pruebe que si $m = 2$ entonces $G = 0$. En el caso en que $m > 2$, verifique que $Ric = G + \frac{1}{2-m} tr(G) g$ y concluya que $G = 0$ si y sólo si $Ric = 0$.