Examen General de Geometría Diferencial - 2018-2

Miercoles 20 de junio del 2018

El examen dura **4 horas.** Resuelva 4 de los 5 ejercicios siguientes. Cada uno de los ejercicios tiene el mismo valor.

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{S}^2$ podemos definir dos cartas por proyección estereográfica desde el polo norte $N = (0,0,1)$ y desde el polo sur $S = (0,0,-1)$. Esto define dos sistemas de coordenadas, (x_N, y_N) en $U = \mathbb{S}^2 \setminus N$ y (x_S, y_S) en $V = \mathbb{S}^2 \setminus S$. Recordamos que la fórmula de cambio de coordenadas es

$$(x_S, y_S) = \frac{(x_N, y_N)}{r_N}$$

con $r_N = x_N^2 + y_N^2$.
a. Escribir dx_S, dy_S y $dx_S \wedge dy_S$ en términos de dx_N, dy_N y $dx_N \wedge dy_N$.
b. Verificar que la 2-forma diferencial ω definida en U y V por las fórmulas

$$\omega|_U = \frac{-4}{(1+r_N)^2} dx_N \wedge dy_N, \qquad \omega|_V = \frac{4}{(1+r_S)^2} dx_S \wedge dy_S,$$

respectivamente, está bien definida en la esfera.
c. Sean (x,y,z) el sistema de coordenadas canónico en $\mathbb{R}^3$ y el campo vectorial $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ Demostrar que X, $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ y $\beta = \iota_X \Omega$ son invariantes bajo rotaciones (cuyo eje sea una recta que pasa por el origen) (recordemos que, por definición, para todo $p \in \mathbb{R}^3$, y $u, v \in T_p\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$,

$$\iota_X \Omega_p(u,v) := \Omega_p(X(p), u, v)).$$

Verificar que β es una forma de volumen en $\mathbb{S}^2$.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{P}^2$ el plano proyectivo real.
a. Explicar si el siguiente mapeo es una inmersión o encaje de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^3$:

$$[x:y:z] \;\mapsto\; \frac{(yz, xz, xy)}{x^2+y^2+z^2}.$$

b. Demostrar que el siguiente mapeo es un encaje de $\mathbb{P}^2$ en $\mathbb{R}^4$:

$$[x:y:z] \mapsto \frac{(yz, xz, xy, x^2+2y^2+3z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Ejercico 3. Muestra que todas las geodésicas de la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ son círculos máximos, es decir, intersecciones de $\mathbb{S}^n$ con planos que pasan por el origen.

Ejercico 4. Sean (M_i, g_i), $i = 1,2$, variedades riemannianas. Define la métrica producto en $M_1 \times M_2$ y sea ∇ la conexión riemanniana compatible con esta métrica. Sean $X \in \mathfrak{X}(M_1)$ y $Y \in \mathfrak{X}(M_2)$. Considéralos como campos en $M_1 \times M_2$. (¿Cómo?) Muestra que $\nabla_X Y = 0$.

Ejercicio 5. Mostrar que el toro parametrizado por

$$F(u,v) = (\sin(u), \sin(v), \cos(v), \cos(u)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

con la métrica inducida por la 3-esfera $\mathbb{S}^3$, posee curvatura Gaussiana cero.